BAUMHAUER, Dr. H., **Leitfaden der Chemie** insbesondere zum Gebrauch an landwirtschaftlichen Lehranstalten. gr. 8⁰. **I. Teil: Anorganische Chemie.** *Zweite Auflage.* Mit 32 Abbildungen. (VIII u. 148 S.) *M.* 1.50; geb. *M.* 1.85. — **II. Teil: Organische Chemie**, mit besonderer Berücksichtigung der landwirtschaftlich-technischen Nebengewerbe. *Zweite Auflage.* Mit 16 Abbildungen. (VIII u. 84 S.) 80 *Pf.*; geb. *M.* 1.15.

BONGAERTZ, J., **Vorschule zur Geometrie.** Nebst Flächen- und Körperberechnung für Präparanden, sowie zum Gebrauch in Volks-, Fortbildungs- und Mittelschulen. Mit 113 Abbildungen. gr. 8⁰. (VIII u. 96 S.) *M.* 1.20; geb. *M.* 1.50.

BRUGIER, G., **Geschichte der deutschen National-Litteratur.** Nebst kurzgefafster Poetik. F ... u. einem Glossar. ... 6; geb. in Halbfranz ... VI, 74 S. u. 1 Tab ...

CAESARIS, ... ecensuit et verborum ... *Gitlbauer.*
Pars ... b. *M.* 1.50.
Pars ... eb. *M.* 1.50.

CORNELII N ... n indicem addidit I ... *M.* 1; geb. *M.* 1.30.

DEMOSTHEN ... rbeitet von W. Fox S ... S). 40 *Pf.*

DREHER, D ... ungs- und Lesestück ... *M.* 1.50; geb. in I ...

FECHT, Dr. ... *cksicht auf die neue* ... em alphabetischen ... *M.* 1.50.
— **Griechisch** ... eb. *M.* 1.85.

FUSS, K., u ... an Lehrerbildungsa ... und 331 Abbildun ...

GEISTBECK, ... **Geographie** für Mitte ... *ehnte Auflage,* mit ... b. *M.* 1.75.

HENSE, Dr. ... ranstalten. Auswahl ... Übersichten und Dar ... **rs.** *Zweite Auflage.* ... **chtung der Neuzeit.** ... **III. Teil: Beschreib** ... *M.* 4.20.

HRIBAR, E. ... n und zum Selbststudium dargestellt. Mit 44 Abbildungen. gr. 8⁰. (VIII u. 100 S.) *M.* 1.20; geb. *M.* 1.50.

KRASS, Dr. M., und Dr. H. **LANDOIS**, **Lehrbuch für den Unterricht in der Naturbeschreibung.** Für Gymnasien, Realgymnasien und andere höhere Lehranstalten bearbeitet. gr. 8⁰. **I. Teil: Lehrbuch der Zoologie.** Mit 219 Abbildungen. *Dritte Auflage.* (XVI u. 340 S.) *M.* 3.30; geb. *M.* 3.70. — **II. Teil: Lehrbuch der Botanik.** Mit 268 Abbildungen. *Dritte Aufl.* (XVI u. 292 S.) *M.* 3; geb. *M.* 3.40. — **III. Teil: Lehrbuch der Mineralogie.** Mit 108 Abbildungen u. 3 Tafeln Krystallformennetze. (X u. 128 S.) *M.* 1.60; geb. *M.* 1.95.

— **Der Mensch und die drei Reiche der Natur** in Wort und Bild für den Schulunterricht in der Naturgeschichte. gr. 8⁰. **I. Teil: Der Mensch und das Tierreich.** Mit 184 Abbildungen. *Zehnte Aufl.* (XVI u. 246 S.) *M.* 2.10; geb. *M.* 2.45. **II. Teil: Das Pflanzenreich.** Mit 215 Abbildungen. *Siebente Aufl.* (XII u. 218 S.) *M.* 2.10; geb. *M.* 2.45. **III. Teil: Das Mineralreich.** Mit 88 Abbildungen. *Vierte Aufl.* (XII u. 132 S.) *M.* 1.40; geb. *M.* 1.75.

Anfangsgründe

der

ebenen Geometrie.

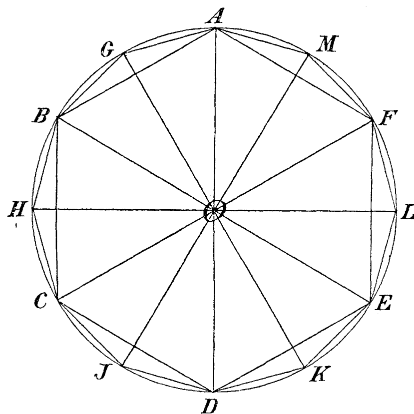
Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet

von

Karl Schwering,
Direktor des stiftischen Gymnasiums
in Düren.

und

Wilhelm Krimphoff,
Oberlehrer am Gymnasium
in Paderborn.



Freiburg im Breisgau.
Herdersche Verlagshandlung.
1894.
Zweigniederlassungen in *Strafsburg, München* und *St. Louis,* Mo.
Wien I, Wollzeile 33: B. Herder, Verlag.

Buchdruckerei der Herderschen Verlagshandlung in Freiburg.

Vorwort.

Vorliegende „Anfangsgründe“ sind in genauem Anschlufs an die Lehrpläne des Jahres 1892 bearbeitet und sollen lediglich Schulzwecken dienen. Wir beabsichtigen die Raumlehre so vorzutragen, wie sie von dem jugendlichen Geiste am leichtesten erfafst und verarbeitet werden kann, nicht aber zugleich allen wissenschaftlichen Anforderungen zu genügen. Wenn Herr Rausenberger von seiner vortrefflichen „Elementargeometrie“ (Leipzig 1887) am Schlusse der Vorrede bemerkt, das Buch sei für den mathematisch Gebildeten, nicht für den ersten Anfänger bestimmt, so möchten wir über diese thatsächliche Feststellung hinausgehend bemerken, dafs ein dem mathematisch Gebildeten und dem Zöglinge unserer höhern Lehranstalten gleichzeitig genügendes Buch heutzutage kaum denkbar, jedenfalls unzweckmäfsig ist. Es hätte in der That nicht der Forschungen von Lobatschewsky, Gaufs, Riemann und in jüngerer Zeit so vieler hervorragender Mathematiker bedurft, um dieser Überzeugung in weiten Kreisen Anerkennung zu verschaffen. Schon die Lehre von den inkommensurablen Gröfsen hätte einen Unterschied zwischen schulmäfsiger und wissenschaftlicher Behandlung hervortreten lassen können. Denn die häufig in den Lehrbüchern auftretende Darstellung, welche öfters die wirkliche Existenz dieser Gröfsen nicht beweist und gleichwohl durch ihre Länge den Lernenden nur zu ermüden pflegt, wird weder den Anforderungen der Wissenschaft noch denen des Unterrichts völlig gerecht. Endlich ist es im Anfangsunterrichte gerade das logische Element, welches dem kindlichen Geiste die gröfsten Schwierigkeiten bereitet. Wer

es versucht, den Begriff des Winkels einem Quartaner logisch klar zu machen oder ihm durch einen Beweis die Überzeugung beizubringen, dafs alle rechten Winkel gleich sind, der wird viele Mühe umsonst aufwenden und bei genauerem Zusehen gewahren, dafs der Schüler die vorgetragenen Erklärungen und Beweise auswendig gelernt hat ohne inneres Verständnis. Daher wendet sich der Unterricht zuerst und fast ausschliefslich an die Anschauung. Hierbei ist nicht der Anschauung von Körpern — was wir übrigens für vollkommen zulässig erachten — der Vorzug gegeben, sondern der Anschauung von ebenen Figuren, die der Schüler selbst durch Zeichnung herstellt. Wir meinen letzterem Verfahren aus mehrfachen Gründen, insbesondere wegen gröfserer Einfachheit und entschiedenerer Weckung der Selbstthätigkeit den Vorzug geben zu sollen. Hat der Lernende so einen gewissen Vorrat mathematischer Begriffe und Kenntnisse durch Anschauung erworben, so kann die eigentliche Denkarbeit beginnen, der Stoff kann nach Begriffen und Urteilen geordnet und durch Schlufsketten eigentlich logisch verknüpft werden. Auf dieser Stufe erkennt der Lernende selbst die Notwendigkeit eines Beweises und fragt nicht mehr unwillig, was denn an einer so klaren Sache eigentlich zu beweisen sei. Auch haben wir beim Beweise selbst eine wesentliche Förderung der Denkarbeit durch jedesmalige Scheidung der Stufen — Lehrsatz; Voraussetzung; Behauptung; Beweis — nicht zu erkennen vermocht. Wichtiger erschien uns, dafs der Schüler die Anschauung möglichst klar erhalte und zur Erreichung dieses Zweckes die Herstellung der Figur angeben lerne. Auf diesem Wege wird der Lernende angehalten, auf dem Gebiete der Anschauung die Voraussetzung des zu beweisenden Satzes rein zu entwickeln. Dann ist es freilich eine sehr schätzbare Übung, den ganzen Beweis in den üblichen Stufen wiederholen und über die vollzogene Denkarbeit völlige Rechenschaft ablegen zu lassen.

Die Aufgaben und Übungssätze sind nicht in besondern Abteilungen gegeben, sondern mit den zum System gehörenden Lehrsätzen zu einem einheitlichen Ganzen verschmolzen. Wie wir meinen, wird der gebotene Übungsstoff auch für spätere Wiederholungen und sonstige Erfordernisse ausreichen. Keineswegs soll er nach der Absicht der Unterzeichneten gleich bei der ersten

Durchnahme vollständig erledigt werden. Im übrigen waren wir bemüht, den Stoff zur Aufgabenlösung sorgfältig auszuwählen, zweckmäſsig zu ordnen, jeden Gedanken hinreichend vorzubereiten und so diesen Teil des Unterrichts der Wichtigkeit des Gegenstandes und den mit Recht weitgehenden Ansprüchen der Jetztzeit entsprechend zu gestalten. In der That soll die Aufgabe Ziel und Zweck des mathematischen Unterrichts sein und darum nicht nur als Anwendung bereits erledigter Sätze, sondern auch als Vorbereitung für künftig zu behandelnde geometrische Wahrheiten ihre Stelle finden. Namentlich in letzterer Hinsicht glauben wir manches Neue zu bieten.

Die im gleichen Verlage erschienenen Werke „100 Aufgaben aus der niedern Geometrie“, „Anfangsgründe der Arithmetik und Algebra“, „Trigonometrie für höhere Lehranstalten“ von Karl Schwering sind kurz als „100 Aufgaben“, „Arithmetik“, „Trigonometrie“ erwähnt worden.

Düren und Paderborn, im Mai 1894.

Die Verfasser.

Inhalt.

Lehraufgabe der Untertertia.

Lehraufgabe der Obertertia.

Lehraufgabe der Untersekunda.

Lehraufgabe der Obersekunda.

Berichtigung. S. 23 Z. 9 v. u. lies 13 statt 12.

§ 1. Einleitung.

Der Lernende beschaffe sich Zirkel und Lineal. Dies sind die Werkzeuge, welche die Geometrie zur Lösung ihrer Aufgaben verwendet.

1. Aufgabe. Mit Hülfe von Zirkel und Lineal ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten vorgeschriebene Längen haben (a, b, c).

a) ***Lösung.*** Ich zeichne mit Hülfe des Lineals eine gerade Linie von beliebiger, aber hinreichend grofser Länge, bezeichne einen Punkt derselben mit Hülfe der Zirkelspitze und nenne ihn B, nehme darauf die eine der gegebenen Längen, etwa die Strecke a, zwischen die Zirkelspitzen und beschreibe so mit dem Halbmesser a um B einen Kreis, welcher die gerade Linie (Gerade) im Punkte C schneiden möge (Fig. 1). Dann beschreibe ich um B mit c, und um C mit b Kreisbogen, die sich in A schneiden mögen. Verbinde ich A mit B und C, so erhalte ich ein Dreieck ABC, dessen Seiten die vorgeschriebenen Längen haben.

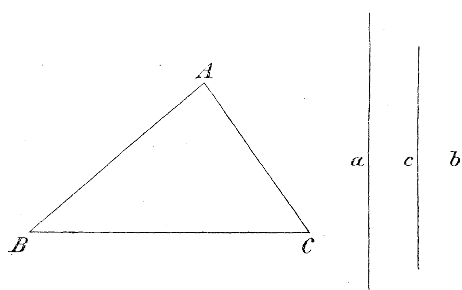


Fig. 1.

b) ***Besprechung dieser Lösung.*** Wir haben zuerst „eine gerade Linie von beliebiger, aber hinreichend grofser Länge“ gezogen. Wenn uns ein hinreichend grofses Papierblatt und ein hinreichend langes Lineal zur Verfügung gestanden hätte, so würden wir mit Leichtigkeit eine Linie von der Länge 1 *m*, 2 *m* u. s. w. haben ziehen können. In Gedanken können wir diese Verlängerung beliebig weit fortsetzen und brauchen nicht zu befürchten, jemals auf ein Hindernis zu stofsen. Grenzen wir auf einer vorliegenden geraden Linie einen Teil ab, etwa durch Eindrücken der Zirkelspitze, so erhalten wir eine Strecke.

Am Dreiecke gewahren wir drei Strecken, die Seiten des Dreiecks, ferner drei Ecken.

An den Ecken, zwischen den Seiten, entstehen drei Winkel. Was ein Winkel ist, das erklären wir vorläufig noch nicht. Wir merken uns nur, dafs ein Winkel entsteht, sobald zwei Linien sich schneiden.

c) ***Unsere Aufgabe hat nur eine einzige Lösung.***

Dies scheint keineswegs von vornherein festzustehen. Denn man könnte die zuerst gezogene gerade Linie an einer andern Stelle des Papiers ziehen; ferner brauchte man nicht die Strecke a zuerst abzutragen. Statt dessen hätte man ebensogut mit der Strecke b oder c beginnen können. Selbst wenn zwei Punkte des Dreiecks, etwa A und B, schon festliegen, kann man noch vier Lagen für den Punkt C angeben (Fig. 2). Aber alle so entstehenden Dreiecke sind in Wahrheit völlig gleich. Man überzeugt sich von dieser Thatsache dadurch, dafs man die Dreiecke aus Papier ausschneidet. Alsdann ist man im stande, dieselben genau aufeinander zu legen, dieselben zur Deckung zu bringen.

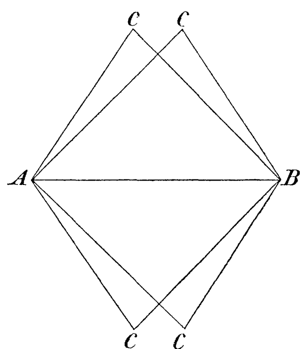


Fig. 2.

Zwei Dreiecke, welche in ihren drei Seiten übereinstimmen, sind kongruent (drittes Kriterium der Deckung).

d) Zwei Dreiecke, welche in den drei Seiten übereinstimmen, können im allgemeinen nur auf eine Weise zur Deckung gebracht werden, wobei AB (Fig. 3) auf A_1B_1, BC auf B_1C_1 und AC auf A_1C_1, oder A auf A_1, B auf B_1, C auf C_1 fällt[1]. Der Lernende fertige sich aus steifem Papier zwei nicht zu kleine Dreiecke an, welche ABC und $A_1B_1C_1$ heifsen mögen und sich in dieser Lage decken. Legen wir A_1 auf A, lassen aber B_1 nicht

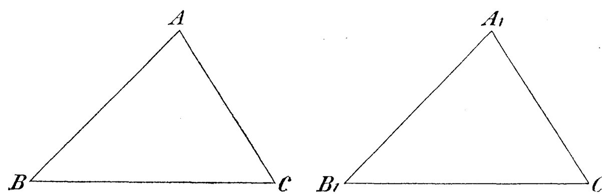


Fig. 3.

[1] A_1 spr. A-eins, A' spr. A-strich.

auf B, sondern auf die Gerade AC fallen (Fig. 4), so gelangt C_1 nicht auf B und ebensowenig B_1 auf C. Die Dreiecke haben zwar bei A (A_1) einen gleichen Winkel, aber zur Kongruenz gelangen sie nicht. Noch weniger gelingt dies, wenn wir etwa B_1 auf A legen (Fig. 5). Dann können wir wohl C_1 in die Richtung AC legen, aber der Punkt C_1 gelangt nicht mit C zur Deckung; auch

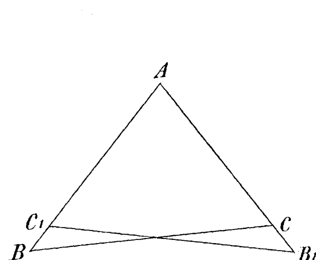


Fig. 4.

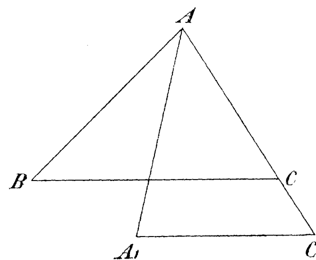


Fig. 5.

$A_1 B_1$ nicht mit dem Schenkel BA. So erkennen wir, dafs der Winkel des Dreiecks bei B_1 oder der Winkel $A_1 B_1 C_1$[1] wohl dem Winkel ABC, aber nicht dem Winkel BAC oder $B_1 A_1 C_1$ gleich ist. In unserer Figur ist $\measuredangle A > B$. ($>$ bedeutet gröfser, $\measuredangle$ ist das Zeichen für Winkel.)

2. Aufgabe. Eine gegebene Strecke zu halbieren.

a) ***Lösung.*** Um die Endpunkte A und B der Strecke (Fig. 6) beschreibe ich mit einer hinlänglich grofsen Strecke gleiche Kreise.

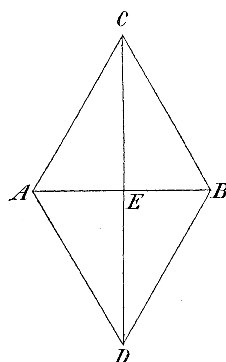


Fig. 6.

Die Schnittpunkte C und D verbinde ich miteinander. Die Linie CD trifft AB in dem Mittelpunkte E.

b) ***Besprechung dieser Lösung.*** Verbindet man den Punkt C und ebenso D mit A und B, so gewahren wir eine Anzahl Dreiecke, deren Seiten dieselbe Länge haben.

Zuerst ist in dem Dreieck CAB die Seite $CA = CB$. Ein Dreieck, in welchem zwei Seiten gleich sind, heifst gleichschenklig. Man nennt die gleichen Seiten Schenkel des Dreiecks und die Ecke, in der sie sich schneiden, die Spitze. Man erkennt, dafs auch ADB, CAD und CBD gleichschenklige Dreiecke sind.

---

[1] Über die Art der Bezeichnung s. unten S. 14.

Stellen wir die Figur auf steifem Papier her und zerschneiden wir dieselbe längs der Linie CD, so erhalten wir die beiden Dreiecke CAD und CBD (Fig. 7). Wir finden dann, dafs dieselben sowohl in der Folge CAD und CBD als auch in der Folge CAD und DBC zur Deckung gebracht werden können.

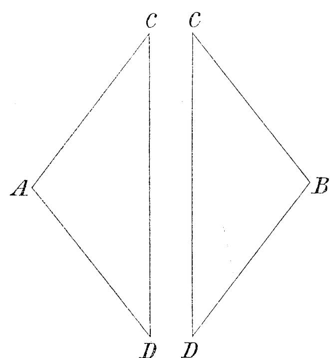


Fig. 7.

Bringt man das Dreieck CAD mit dem andern in der Folge CBD zur Deckung, so schliefsen wir, dafs $\measuredangle ACD = BCD$ und $\measuredangle ADC = BDC$ ist. Bringt man aber die beiden Dreiecke in der Folge CAD und DBC zur Deckung, so sieht man, dafs auch $\measuredangle ACD = BDC$ und $\measuredangle ADC = BCD$ ist.

Richten wir unsere Aufmerksamkeit besonders darauf, dafs sowohl $\measuredangle ACD = BCD$ als auch $\measuredangle ADC = BCD$ ist, so finden wir, dafs auch $\measuredangle ACD = ADC$ ist. Das Dreieck ADC ist aber ein gleichschenkliges. In ihm sind also die Winkel an der ungleichen Seite CD, welche die Grundlinie genannt wird, einander gleich.

Zeichnen wir ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck, was wir nach Aufgabe 1 bewerkstelligen können, indem wir die Seite b gleich c nehmen, so finden wir, dafs jedesmal die Winkel an der Grundlinie gleich sind. In jedem gleichschenkligen Dreieck sind also die Winkel an der Grundlinie gleich.

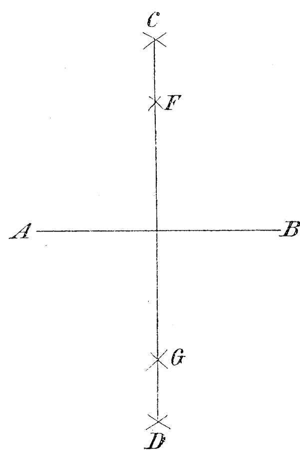


Fig. 8.

Zerschneiden wir die Figur 6 längs der Linie CD und längs AB, so erhalten wir vier Dreiecke. Dieselben sind, wie wir durch Aufeinanderlegen sehen können, alle einander kongruent. Es fällt bei dem Aufeinanderlegen AE mit BE zusammen. Wir sehen hieraus, dafs $AE = BE$ ist, und dafs also, wie verlangt wurde, AB durch E halbiert ist.

Bei der Lösung beschrieben wir um A und B mit derselben hinlänglich grofsen Strecke Kreise. Der Versuch zeigt uns, dafs die Kreise sich nicht schneiden, wenn die Strecke gleich der Hälfte von AB oder kleiner als dieselbe ist.

Man mufs also die Strecke gröfser wählen als die Hälfte von AB. Macht man dann die Lösung, indem man wiederholt um A und B mit gleichen Strecken Kreise beschreibt, so findet man, dafs deren Schnittpunkte immer auf der Geraden CD liegen (Fig. 8).

Eine besonders auffällige Figur erreicht man dadurch, dafs man die Strecke, mit welcher man um A und B Kreise beschreibt, gleich AB nimmt. Dann sind in dem Dreiecke ACB alle drei Seiten einander gleich (Fig. 9). Ein solches Dreieck heifst gleichseitig. Auch ADB ist gleichseitig und läfst sich mit ACB zur Deckung bringen. Hierbei tritt die Eigentümlichkeit ein, dafs man bei der Deckung jede Ecke des zweiten Dreiecks auf jede Ecke des ersten Dreiecks legen kann, und man macht hierbei die Bemerkung, dafs jeder Winkel des einen Dreiecks jedem beliebigen Winkel des zweiten Dreiecks gleich ist.

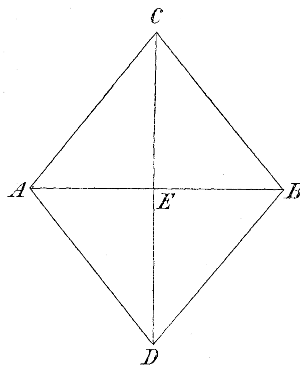


Fig. 9.

Zeichnet man ein beliebiges gleichseitiges Dreieck und schneidet man die drei Winkel desselben einzeln aus, so findet man durch Aufeinanderlegen, dafs sie alle einander gleich sind. Ein gleichseitiges Dreieck ist also auch gleichwinklig.

Man kann sogar noch weiter gehen und behaupten: Alle Winkel in gleichseitigen Dreiecken sind untereinander gleich. Um dies zu ersehen, genügt es, mehrere gleichseitige Dreiecke zu zeichnen. Die Winkel derselben lassen sich, wenn man sie ausschneidet, genau aufeinander legen.

3. Aufgabe. In einem gegebenen Punkte einer gegebenen Geraden auf derselben eine Senkrechte zu errichten.

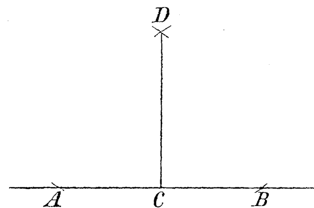


Fig. 10.

a) ***Lösung.*** Um den gegebenen Punkt C (Fig. 10) beschreibe ich einen ganz beliebigen Kreis, welcher die gerade Linie in den Punkten A und B schneiden möge. Dann beschreibe ich um A und B mit einer Strecke, die gröfser als die Hälfte von AB sein mufs, Kreise. Den einen ihrer Schnittpunkte, den ich D nennen will, verbinde ich mit C. Dann ist DC die Senkrechte auf AB.

b) ***Besprechung dieser Lösung.***

Zerschneidet man die Figur den Linien AB und CD entlang, so findet man durch Aufeinanderlegen, dafs die Winkel ACD und BCD einander gleich sind. Winkel, welche so grofs sind wie ACD oder BCD, nennt man rechte Winkel. Man kann dieselben in der Natur oft beobachten (Fensterkreuz, Tisch, Bank, Zeiger der Uhr um 9 und 3 Uhr). Die Aufgabe ist also sehr wichtig. In unserer Zeichnung war sehr viel Willkür. Von dem gegebenen Punkte aus konnten wir zwei gleiche, aber beliebig grofse Strecken abtragen, was durch Beschreibung des Kreises um C geschah. Dann konnten wir mit zwei gleichen, hinlänglich grofsen, aber sonst beliebigen Strecken Kreise beschreiben. Wir sehen daraus, dafs es zur Hervorbringung eines rechten Winkels gar nicht auf die Länge seiner Schenkel ankommt. Auf der Taschenuhr wie auf der Turmuhr stehen um 9 Uhr die Zeiger aufeinander senkrecht.

Man kann sich darum auch zur Zeichnung eines rechten Winkels eines dreieckigen, rechtwinkligen Lineals bedienen. Ein solches Instrument heifst Winkelhaken.

4. Aufgabe. Ein Rechteck zu zeichnen, dessen Länge und Breite gegeben und ungleich sind.

a) ***Lösung.*** Ich trage auf einer geraden Linie die Strecke a ab und nenne die Endpunkte A und B (Fig. 11). Dann errichte ich auf AB im Punkte B eine Senkrechte und trage auf derselben die Strecke b ab. Den Endpunkt derselben nenne ich C. Schliefslich errichte ich noch auf AB im Punkte A und auf BC im Punkte C eine Senkrechte. Der Schnittpunkt dieser beiden Senkrechten ist der vierte Eckpunkt des verlangten Rechtecks.

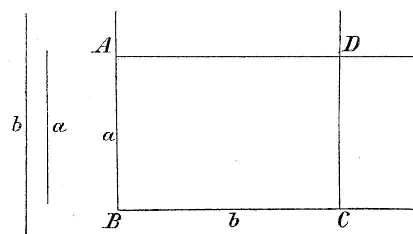


Fig. 11.

b) ***Besprechung dieser Lösung.***

Man hätte ebensogut vom Punkte A der Strecke AB wie vom Punkte B ausgehen können. Wie man auch verfahren mag, es ist stets der vierte Winkel ebenso ein rechter wie die drei andern, welche durch Errichtung der Senkrechten entstehen.

Besonders merkwürdig liegt in unserer Figur die Linie AB zu DC. Verlängert man dieselben so weit wie man will, so schneiden sie sich nicht. Solche Linien, die sich selbst bei gröfster Verlängerung nicht schneiden, heifsen parallele Linien. Auch AD und BC sind parallele Linien.

Verbindet man noch in dem Rechtecke $ABCD$ zwei gegenüberliegende Ecken, etwa B und D (Fig. 12), so entstehen zwei kongruente Dreiecke. Dieselben decken sich nach dem dritten Kriterium. Der gröfsern Anschaulichkeit wegen wollen wir aber auch hier das Rechteck längs der Linie BD zerschneiden und die Dreiecke sodann aufeinander legen. Die Deckung kann nur in der Reihenfolge ABD und CDB erfolgen. Es ist nicht möglich, die Dreiecke durch Umklappen um die Seite BD zur Deckung zu bringen. Es ist $\measuredangle\, ABD = BDC$, $\measuredangle\, ADB = CBD$.

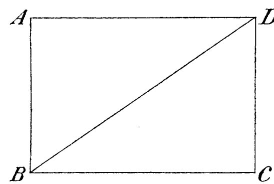


Fig. 12.

5. *Aufgabe.* Durch einen Punkt A zu einer Geraden BC eine Parallele zu ziehen.

a) ***Lösung.*** Von dem Punkte A (Fig. 13) fälle ich auf BC eine Senkrechte. Dies geschieht also: Um A beschreibe ich mit einer beliebigen, hinreichend grofsen Strecke einen Kreis, welcher die Gerade BC in den Punkten D und E schneiden möge. Sodann beschreibe ich mit derselben Strecke um D und E Kreise, welche sich aufser in dem Punkte A noch in F schneiden mögen. Die Linie AF steht dann senkrecht auf BC.

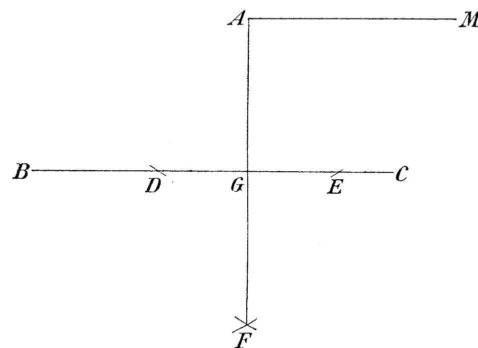


Fig. 13.

Um nun die Parallele zu BC zu erhalten, errichte ich auf FA im Punkte A die Senkrechte AM. Dieselbe ist parallel zu BC.

b) ***Besprechung.*** Willkürlich ist bei dieser Lösung allein die Länge der Strecke, mit der man um A den Kreis beschreibt. Aufserdem war es auch nicht nötig, die Strecke, mit der man

die Kreise um D und E beschrieb, derjenigen gleich zu nehmen, mit der man den Kreis um A beschrieb.

Wir haben nun drei zusammenhängende ***Aufgaben:*** eine Strecke zu halbieren; eine Senkrechte zu errichten; zu einer Geraden eine Parallele zu ziehen.

6. Aufgabe. Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

Lösung. Um den Scheitelpunkt des gegebenen Winkels BAC (Fig. 14) beschreibe ich mit einer beliebigen Strecke einen Kreis. Die Schnittpunkte mit den Schenkeln nenne ich M und N. Sodann beschreibe ich um M und N mit derselben hinreichend grofsen Strecke Kreise, die sich wie immer in zwei Punkten schneiden, von denen ich aber, weil es ausreichend ist, nur einen, der zwischen den Schenkeln liegt, beachte und mit O benenne. Die Verbindungslinie des Punktes O mit A halbiert den Winkel.

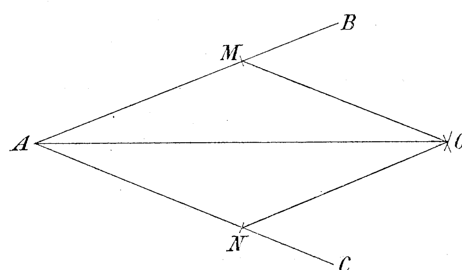


Fig. 14.

Besprechung. Der Lernende gebe die Stücke an, die bei dieser Lösung willkürlich waren. Verbinden wir noch die Punkte M und N mit O, so erhalten wir die beiden kongruenten Dreiecke AMO und ANO. Hier gelingt es, dieselben durch Umklappen um die Linie AO zur Deckung zu bringen.

7. Aufgabe. Man teile einen rechten Winkel in zwei, vier, acht u. s. w. gleiche Teile.

Besprechung. Die Aufgabe 7, ein besonderer Fall der Aufgabe 6, liefert uns das Mittel, eine Windrose herzustellen (Fig. 15).

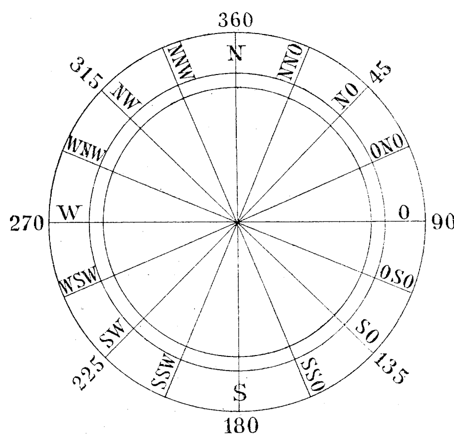


Fig. 15.

Man kann für den rechten Winkel irgend eine Zahlengröfse annehmen, gerade so wie man auch bei Münzen verfährt. Die Mark hat beispielsweise 100 Pfennige. Danach könnte man

beim rechten Winkel die Zahl 100 vorschlagen und sagen, der rechte Winkel hat 100 Teile. Jedem Teil mufs man dann noch eine Benennung geben. Als solche hat man den Namen Grad allgemein angenommen. In Deutschland und vielen andern Ländern hat man den rechten Winkel in 90^0 (90 Grad) geteilt. Wieviel Grad haben die Winkel, welche die Zeiger einer Uhr um 10 Uhr, 11 Uhr, 7 Uhr, 6 Uhr miteinander bilden?

8. Aufgabe. Wieviel beträgt die Summe der Winkel in einem rechtwinkligen Dreiecke?

Lösung. Das rechtwinklige Dreieck ABD (Fig. 16) ergänze ich nach Aufgabe 4 zu einem Rechtecke. Dann ist

$$\measuredangle\ ABD + CBD = 90^0.$$

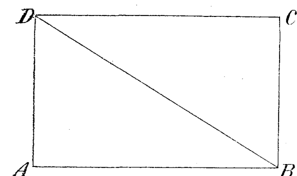


Fig. 16.

Wir haben aber schon oben gesehen, dafs $\measuredangle\ CBD = ADB$ ist. Folglich ist auch $\measuredangle\ ABD + ADB = 90^0$.

Da aber $\measuredangle\ BAD = 90^0$ ist, so haben alle Winkel des Dreiecks ABD zusammen 180^0.

9. Aufgabe. Wieviel beträgt die Summe der Winkel in einem beliebigen Dreieck?

Lösung. Ich fälle nach Aufgabe 5 eine Senkrechte von A auf BC (Fig. 17). Dadurch wird das Dreieck ABC in zwei rechtwinklige ADB und ADC geteilt. Die sechs Winkel dieser beiden Dreiecke haben aber nach der vorigen Aufgabe zusammen 360^0. Zieht man von diesen die beiden Winkel bei D, welche zusammen 180^0 haben, ab, so bleibt für die vier andern Winkel 180^0 übrig. Diese vier Winkel sind aber die Winkel des Dreiecks ABC. Folglich beträgt die Summe derselben 180^0.

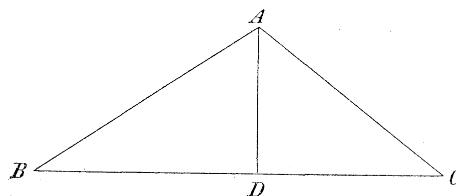


Fig. 17.

§ 2. Gerade Linie und Strecke.

In den vorhergehenden Untersuchungen haben wir eine Reihe von Kenntnissen über geometrische Dinge erworben. Die Aneignung dieser Kenntnisse gelang uns fast lediglich auf dem Wege der Anschauung. Indes ist es nicht Sache der geometrischen Wissenschaft, auf diesem Wege vorzugehen. Vielmehr mufs man aus

einer geringen Anzahl von Wahrheiten alle andern durch bloſses Nachdenken ableiten. Solche Wahrheiten heiſsen Grundwahrheiten, Grundsätze, Axiome. Bezüglich der geraden Linie stellen wir folgenden Grundsatz auf:

a) Zwei gerade Linien können sich nur in einem Punkte schneiden.

Aus demselben kann man ableiten:

b) Durch zwei Punkte kann man nur eine gerade Linie ziehen.

Hierzu fügen wir noch folgende Erklärungen hinzu:

α) Eine gerade Linie ist unbegrenzt, d. h. sie hat weder einen Anfangspunkt noch einen Endpunkt. Man kann daher eine gerade Linie, welche man auch kurz Gerade nennt, niemals ganz zeichnen.

β) Eine Strecke ist der begrenzte Teil einer geraden Linie.

Punkte bezeichnet man mit groſsen lateinischen Buchstaben, Strecken dagegen mit kleinen lateinischen Buchstaben oder auch mit groſsen, welche man an die Endpunkte derselben setzt.

§ 3. Der Kreis.

Wenn eine Strecke sich um den einen Endpunkt herumdreht, so beschreibt der andere Endpunkt eine Linie, welche man Kreislinie oder kurz Kreis nennt.

Die Kreislinie nennt man auch Peripherie. Unter Kreis versteht man ferner öfters die Fläche, welche von der Peripherie begrenzt wird.

Mittelpunkt oder Centrum eines Kreises ist der feste Punkt, um den sich die Strecke bei Beschreibung des Kreises dreht.

Die Entfernung eines Punktes der Peripherie vom Mittelpunkt heiſst Radius oder Halbmesser.

Ein Kreis hat soviel Radien als der Kreis Punkte, folglich unendlich viele. Die Radien desselben Kreises sind einander gleich. Sie sind nämlich gleich der Strecke, durch deren Umdrehung der Kreis entstanden ist.

Hiernach kann man den Kreis auch in folgender Weise erklären:

Der Kreis ist eine Linie, deren sämtliche Punkte von einem festen Punkte, dem Mittelpunkte oder Centrum, gleiche Entfernung haben.

Eine Sehne ist eine Strecke zwischen zwei Punkten der Peripherie.

Ein Durchmesser ist eine durch den Mittelpunkt gezogene Sehne (Fig. 18).

Jeder Kreis hat unzählig viele Durchmesser. Die Durchmesser desselben Kreises sind alle einander gleich. Jeder ist nämlich gleich dem doppelten Radius.

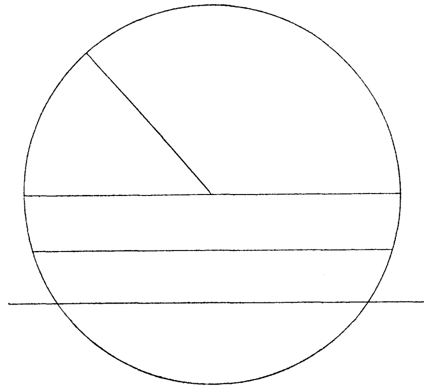


Fig. 18.

Eine Sekante ist eine gerade Linie, die den Kreis schneidet.

Die Anschauung lehrt, daſs eine Sekante den Kreis in zwei Punkten schneidet.

Eine über die Endpunkte hinaus verlängerte Sehne ist eine Sekante.

Wir werden später den sehr wichtigen Satz beweisen: Jede gerade Linie, welche einen Kreis in einem Punkte schneidet und nicht berührt, hat mit dem Kreise noch einen zweiten Punkt gemeinsam.

Archimedes († 212 v. Chr.) hat bewiesen, daſs man die Länge der Peripherie annähernd richtig erhält, wenn man den doppelten Radius mit $3^1/_7$ multipliziert. Diese Verhältniszahl, welche bis auf sieben Decimalstellen richtig lautet: 3,1415927, wird allgemein π genannt. Für uns genügt die Bestimmung $\pi = 3^1/_7$, ja für Kopfrechnung $\pi = 3$. Wir bestätigen dies durch Versuche, z. B. durch Umwicklung einer kreisrunden Schachtel mit einem Faden.

1. Aufgabe. Der Radius des an der Schultafel befindlichen Kreises ist 0,25 *m* lang. Wie lang ist seine Peripherie?

Lösung. Der doppelte Radius ist gleich 0,50 *m*, folglich ist die Peripherie $0{,}50 \cdot 3^1/_7$ oder $157^1/_7$ *cm* lang.

2. Aufgabe. Man zeichne auf ein Blatt Papier einen Kreis, dessen Radius 5 *cm* lang ist, und bestimme die Länge seiner Peripherie.

§ 4. Bogengrade, Bogenminuten und Bogensekunden.

Ein Kreisbogen ist ein begrenzter Teil der Peripherie.

Ein Bogengrad ist der 360ste Teil der ganzen Peripherie.

Eine Bogenminute ist der 60ste Teil eines Bogengrades.

Eine Bogensekunde ist der 60ste Teil einer Bogenminute.

Die abgekürzte Bezeichnung für Bogengrade, Bogenminuten und Bogensekunden erkennt man an dem nachfolgenden Beispiele: $35^0\ 46'\ 56''$ heifst 35 Grad 46 Minuten 57 Sekunden.

3. Aufgabe. Die Peripherie des an der Schultafel gezogenen Kreises ist $157^1/_7$ *cm* lang. Berechne die Länge eines Bogengrades, einer Bogenminute, einer Bogensekunde.

Lösung. Die Länge des Bogengrades ist $\frac{157^1/_7}{360}$ *cm* oder 0,44 *cm*. Die Bogenminute ist $\frac{4{,}4}{60}$ *mm* lang. Die Ausrechnung ergiebt 0,07 *mm*. Die Bogensekunde ist $\frac{0{,}07}{60}$ *mm* oder 0,001 *mm* lang.

Hieraus folgt, dafs die Minute schon eine kleine, die Sekunde aber eine so verschwindend kleine Gröfse ist, dafs sie nur sehr selten, besonders nur in der Astronomie berücksichtigt werden mufs. Für die meisten, auch recht genauen Rechnungen teilt man die Minute in zehn gleiche Teile.

§ 5. Koncentrische Kreise. Geteilter Kreis.

Wenn eine Strecke sich um den einen Endpunkt herumdreht, so beschreibt nicht nur der andere Endpunkt, sondern überhaupt jeder Punkt der Strecke einen Kreis. Diese Kreise haben denselben Mittelpunkt. Man nennt sie darum koncentrische Kreise (Fig. 19).

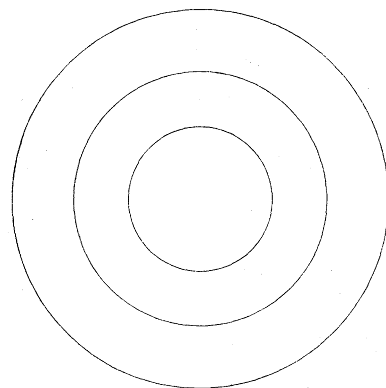


Fig. 19.

Zieht man von dem Mittelpunkte koncentrischer Kreise zwei Radien, so schneiden dieselben auf jedem der koncentrischen Kreise einen Kreisbogen ab. Diese Kreisbogen haben gleichviele Grade, Minuten und Sekunden, wie die nachfolgende Überlegung zeigen wird.

Wenn in unserer Fig. 20 die Strecke OA gedreht wird, so dafs sie in die Lage OB kommt, und wenn hierbei der Punkt A ein Siebentel der ganzen Peripherie beschreibt, so beschreibt auch

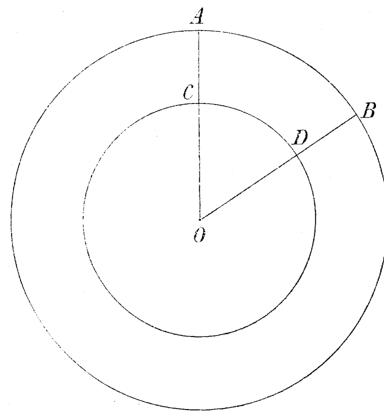


Fig. 20.

der Punkt C ein Siebentel der ganzen Peripherie. AB ist also ein Siebentel der Peripherie des gröſsern Kreises und CD ein Siebentel der Peripherie des kleinern Kreises, d. h. die Bogen AB und CD haben gleichviel Grade, Minuten und Sekunden. Die Anzahl derselben erhält man dadurch, daſs man 360^0 durch 7 dividiert. Die Ausrechnung ergiebt $51^0\,25'\,43''$.

Auf diesem Verhalten koncentrischer Kreise beruht der Gebrauch des geteilten Kreises (Winkelmessers, zuweilen noch mit einem Fremdwort ‚Transporteur' genannt).

Derselbe ist ein Halbkreis, auf dessen Peripherie 180 Bogengrade abgeteilt sind.

Mit dem geteilten Kreise miſst man in folgender Weise die Gröſse eines Kreisbogens: Man legt den geteilten Kreis so auf, daſs sein Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammenfällt und daſs der eine Halbmesser, an dessen Endpunkt der Nullpunkt der Teilung sich befindet, auf den Anfangspunkt des Bogens zeigt. Die Zahl mit welcher der Endpunkt des Bogens zusammenfällt, giebt die Anzahl der Grade an.

4. Aufgabe. Man messe verschiedene Kreisbogen.

5. Aufgabe. Es sind Kreisbogen zu zeichnen, welche 15^0, 30^0, 60^0, 175^0, 180^0, 233^0, 345^0 haben.

§ 6. Der Winkel.

Von zwei geraden Linien, die von demselben Punkte ausgehen, sagt man, sie bilden einen Winkel. Den gemeinsamen Punkt der beiden Linien nennt man Scheitelpunkt des Winkels. Die geraden Linien selbst heiſsen Schenkel.

Man miſst die Gröſse eines Winkels in folgender Weise:

Um den Scheitelpunkt beschreibt man mit beliebigen Radien Kreise. Die Schenkel schneiden auf diesen koncentrische Kreisbogen ab, welche nach dem Vorigen gleichviel Grade, Minuten und Sekunden

haben. Von dem Winkel sagt man nun, dafs er ebensoviel Grade, Minuten und Sekunden habe. Da es auf die Gröfse des Radius bei dieser Bestimmung gar nicht ankommt, so sieht man sofort ein, dafs die Gröfse eines Winkels ganz unabhängig von der Länge der Schenkel ist.

Demgemäfs setzen wir voraus, es sei um den Scheitelpunkt mit der Einheit (etwa 1 *cm*) als Radius ein Kreis beschrieben. Der zwischen den Schenkeln liegende Kreisbogen heifst dann das natürliche Mafs des Winkels.

Man bezeichnet einen Winkel gewöhnlich durch einen griechischen Buchstaben oder durch drei lateinische Buchstaben, von denen der mittlere am Scheitelpunkte steht, während die beiden andern an die Schenkel gesetzt werden.

Einen Winkel von 90° bezeichnet man öfters mit *R*. Wir werden diese Bezeichnung nicht anwenden. Dagegen ziehen wir die allgemein angenommene, allerdings künstliche Teilung des rechten Winkels in 90° selbst dem natürlichen Mafse vor und werden sie **allein** verwenden. Sie liegt auch der Einrichtung der Winkelinstrumente und der Logarithmentafeln sowie bei manchen Begriffsbestimmungen der Geographie zu Grunde.

6. Aufgabe. Man zeichne mehrere Winkel und messe ihre Gröfse mit dem geteilten Kreise.

7. Aufgabe. Man zeichne vermittelst des geteilten Kreises Winkel, welche 12°, 25°, 70°, 90°, 175°, 235°, 350° haben.

Ein rechter Winkel ist ein solcher Winkel, der 90° hat.

Ein flacher Winkel ist ein Winkel, der 180° hat.

Ein spitzer Winkel ist ein Winkel, der weniger als 90° hat.

Ein stumpfer Winkel ist ein Winkel, der mehr als 90°, aber weniger als 180° hat.

Spitze, rechte, stumpfe Winkel nennt man hohle Winkel.

Winkel, welche mehr als 180° haben, heifsen erhabene Winkel.

Komplementwinkel sind solche Winkel, die zusammen 90° haben.

Supplementwinkel sind solche Winkel, die zusammen 180° haben.

Aufgabe. Wenn ein Winkel 30°, 40°, 60°, 75° hat, wieviel Grad hat dann sein Komplementwinkel?

Aufgabe. Wenn ein Winkel 125°, 130°, 140°, 155° hat, wie grofs ist alsdann sein Supplementwinkel?

§ 7. Nebenwinkel und Scheitelwinkel.

Ein Nebenwinkel entsteht, wenn man einen Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus verlängert.

Ist ein Winkel gleich α, so ist sein Nebenwinkel $180^0 - \alpha$.

Verlängert man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus, so entstehen drei neue Winkel. Je zwei von diesen, die einander gegenüberliegen, heifsen Scheitelwinkel.

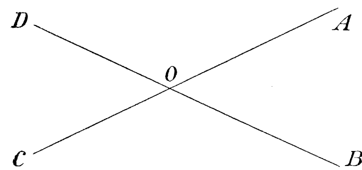


Fig. 21.

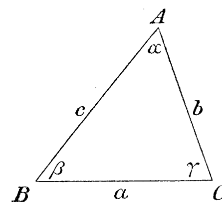
1. Lehrsatz. Scheitelwinkel sind gleich. Denn dreht man OA (Fig. 21) bis in die Lage von OB, so dreht sich gleichzeitig OC in die Lage von OD.

2. Lehrsatz. Zieht man von einem Punkte aus beliebig viele Gerade, so ist die Summe der sämtlichen Winkel, die von je zwei aufeinander folgenden Geraden gebildet werden, gleich 360^0.

Beweis. Zum Beweise beschreibe man um den Punkt mit beliebigem Radius einen Kreis. Auf demselben werden ebensoviele Kreisbogen abgeschnitten, als Gerade vorhanden sind. Jeder Winkel nun hat soviel Grade, Minuten und Sekunden als der ihm gegenüberliegende Bogen. Alle Bogen zusammen genommen haben aber 360^0. Folglich ist auch die Summe der Winkel gleich 360^0.

§ 8. Das Dreieck.

Verbindet man drei Punkte, z. B. A, B, C, welche nicht in gerader Linie liegen, miteinander, so entsteht ein Dreieck.



Fig, 22.

Die Strecken BC, CA, AB (Fig. 22), welche durch a, b, c bezeichnet werden, heifsen die Seiten, die Punkte A, B, C die Eckpunkte des Dreiecks. Die Winkel BAC, CBA, ACB werden bezüglich α, β und γ benannt.

8. Aufgabe. Man bestimme von verschiedenen Dreiecken die Summe der Winkel vermittelst des geteilten Kreises.

3. Lehrsatz. Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist gleich 180^0.

Beweis. Von einem beliebigen Punkte einer der drei Dreiecksseiten, etwa von J aus auf AC, gehe ich um das Dreieck

herum (Fig. 23). Um von J nach A zu gelangen, brauche ich mich nicht zu drehen. Um aber von A nach B zu kommen, mufs ich mich um den Winkel δ drehen. Bei B und C mufs ich mich ferner noch um die Winkel ε und η drehen, bevor ich nach J zurück gelange. Die drei Winkel $\delta, \varepsilon, \eta$ sind nun gleich 360^0. Dieses kann man sich in folgender Weise klar machen. Es kommt bei dem Beweise gar nicht darauf an, ob man ein grofses oder kleines Dreieck annimmt, da das Fortschreiten auf den Seiten keinen Einflufs auf die Gröfse der Drehung hat, die an den Eckpunkten notwendig ist. Nimmt man darum ein ganz kleines Dreieck an, welches ungefähr zu einem Punkte zusammengeschrumpft ist, so sieht man sofort, dafs nach Lehrsatz 2

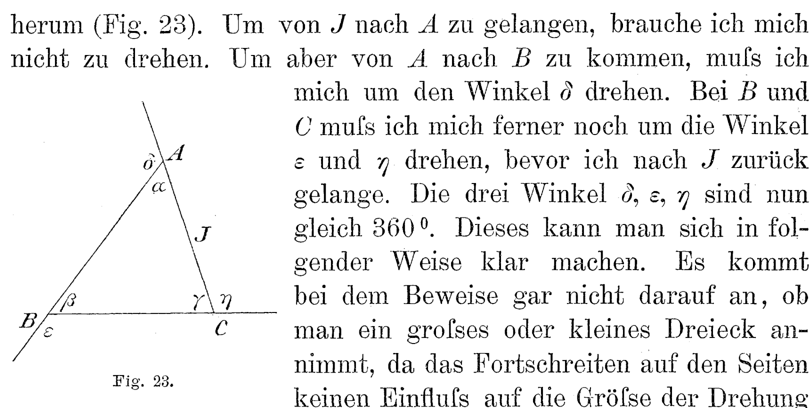


Fig. 23.

$$\delta + \varepsilon + \eta = 360^0 \text{ ist.}$$

Ferner ist

$$\alpha + \delta = 180^0,$$
$$\beta + \varepsilon = 180^0,$$
$$\gamma + \eta = 180^0,$$

da jedes dieser Winkelpaare einen flachen Winkel bildet. Daraus folgt nach dem Grundsatz: Gleiches zu Gleichem addiert giebt Gleiches:

$$\alpha + \delta + \beta + \varepsilon + \gamma + \eta = 540^0$$

oder

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \eta = 540^0.$$

Da nun $\delta + \varepsilon + \eta = 360^0$ ist, so folgt durch Anwendung des Grundsatzes: Gleiches von Gleichem subtrahiert giebt Gleiches[1]:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

9. Aufgabe. Es sei

a) $\alpha = 55^0$, $\beta = 63^0$,

b) $\alpha = 34^0 17'$, $\beta = 39^0 25'$,

c) $\alpha = 47^0 28' 39''$, $\beta = 88^0 59' 27''$;

wie grofs ist dann γ?

4. Lehrsatz. Sind zwei Winkel eines Dreiecks bekannt, so ist auch der dritte bekannt.

---

[1] Zu diesem Beweise sehe man unten die Schlufsbemerkung.

Beweis. Den dritten Winkel findet man, indem man die Summe der beiden bekannten von 180^0 subtrahiert. Ist der eine Winkel α (Fig. 24) und der andere β, so ist der dritte gleich $180^0 - (\alpha + \beta)$ oder auch gleich $180^0 - \alpha - \beta$.

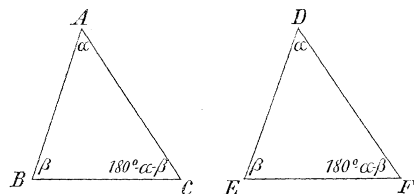


Fig. 24.

Stimmen daher zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so stimmen sie auch im dritten überein.

In einem Dreieck kann nur ein Winkel ein stumpfer oder rechter sein.

Ist in einem Dreieck ein Winkel ein rechter, so heifst dasselbe rechtwinklig. Die den rechten Winkel bildenden Seiten heifsen die Katheten*, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heifst die Hypotenuse**.

Ist in einem Dreieck ein Winkel ein stumpfer, so heifst dasselbe stumpfwinklig.

Sind in einem Dreieck alle Winkel spitze, so heifst dasselbe spitzwinklig.

Der Nebenwinkel eines Dreieckswinkels wird Aufsenwinkel genannt.

Ein Dreieck hat sechs Aufsenwinkel. Man erhält dieselben durch Verlängerung der Seiten über die Eckpunkte hinaus.

5. Lehrsatz. Der Aufsenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der innern ihm nicht anliegenden Dreieckswinkel.

Herstellung der Figur. Ich zeichne ein Dreieck ABC (Fig. 25) und stelle daran einen beliebigen Aufsenwinkel her, indem ich z. B. BC über C hinaus verlängere. Einen Punkt der verlängerten Seite nenne ich D.

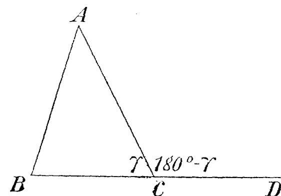


Fig. 25.

Behauptung. $\sphericalangle ACD = CBA + BAC$.

Beweis. Den Winkel ACB nenne ich γ. Dann ist der Winkel $ACD = 180^0 - \gamma$. Ebenso ist auch zufolge Lehrsatz 3:

$$\sphericalangle CBA + BAC = 180^0 - \gamma;$$

darum ist: $\sphericalangle DCA = CBA + BAC$.

* Katheten. ** Hypotenuse.

§ 9. Die beiden ersten Kongruenzsätze.

6. Lehrsatz (1. Kriterium). Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und in dem von ihnen gebildeten Winkel[1].

Beweis. Die beiden Dreiecke ABC und DEF (Fig. 26) sind so beschaffen, daſs $AB = DE$, $AC = DF$ und $\sphericalangle BAC = EDF$ ist. Um dieselben zur Deckung zu bringen, lege ich das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC, daſs DE mit AB zusammenfällt. Dies ist möglich, da $DE = AB$ ist. Es fällt dann auch die Seite DF in die Richtung von AC, da der Winkel EDF gleich dem Winkel BAC ist. Ferner fällt, weil $DF = AC$ ist, F mit C zusammen. Da nun E auf B und F auf C liegt, so muſs auch EF mit BC zusammenfallen, weil zwischen zwei Punkten nur eine gerade Verbindungslinie möglich ist.

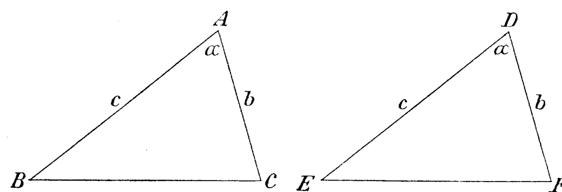


Fig. 26.

7. Lehrsatz (2. Kriterium). Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

Beweis. Die beiden Dreiecke ABC und DEF (Fig. 27) sind so beschaffen, daſs $BC = EF$, $\sphericalangle ABC = DEF$ und $\sphericalangle ACB = DFE$ ist. Um nun dieselben zur Deckung zu bringen, lege ich das Dreieck DEF so auf ABC, daſs EF mit BC zusammenfällt. Dies ist möglich, da $EF = BC$ ist. Dann fällt ED in die Richtung von BA und FD in die Richtung von CA, da $\sphericalangle ABC = DEF$ und $\sphericalangle ACB = DFE$ ist. Es muſs dann auch D mit A zusammenfallen, da zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden können.

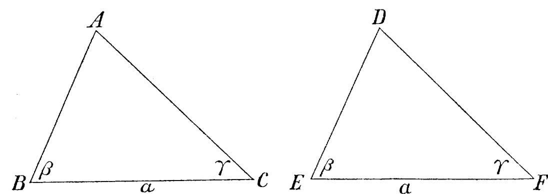


Fig. 27.

---

[1] Bei den vier Kriterien unterlasse man es nicht, die Figuren dem Wortlaut des Satzes entsprechend zu zeichnen. Hierzu genügt Zirkel und geteilter Kreis.

Besprechung des zweiten Kriteriums. Da zwei Dreiecke, welche in zwei Winkeln übereinstimmen, auch im dritten übereinstimmen, so kann man auch den Satz aufstellen:

Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in einer Seite, einem anliegenden und dem der Seite gegenüberliegenden Winkel.

Nunmehr sind wir im stande, über das gleichschenklige Dreieck Wahrheiten strenge zu beweisen, die wir in der Einleitung lediglich der Anschauung entnommen haben.

§ 10. Sätze über das gleichschenklige Dreieck. Beziehungen zwischen Winkel und Gegenseite.

8. Lehrsatz. Die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich.

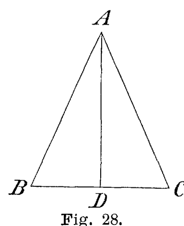


Fig. 28.

Beweis. In dem Dreieck ABC (Fig. 28) ist $AB = AC$. Um zu beweisen, dafs $\measuredangle\, ABC = ACB$ ist, sei der Winkel BAC durch die Linie AD halbiert. Dann ist $\triangle\, ABD \cong ACD$ (1. Krit.) ($\triangle$ Dreieck; $\cong$ kongruent). Folglich ist $\measuredangle\, ABC = ACB$, weil sie bei der Deckung aufeinander fallen.

9. Lehrsatz. Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so ist dasselbe gleichschenklig.

Beweis. In dem Dreieck ABC sei $\measuredangle\, ABC = ACB$. Um zu zeigen, dafs dann $AB = AC$ ist, nehme ich an, dafs AD den Winkel BAC halbiere. Dann ist $\triangle\, ABD \cong ACD$ (2. Krit.). Es ist somit $AB = AC$, da sich bei der Kongruenz diese Stücke decken. $\triangle\, ABC$ ist also gleichschenklig.

10. Aufgabe. Man zeige, dafs in einem gleichseitigen Dreieck jeder Winkel gleich 60^0 ist.

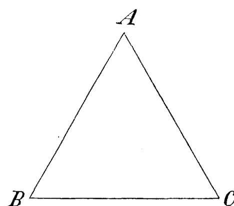


Fig. 29.

Lösung. Da in dem gleichseitigen Dreieck ABC (Fig. 29) $AB = AC$ ist, so ist $\measuredangle\, B = C$. Da aber auch $AC = CB$ ist, so folgt $\measuredangle\, B = A$. Die drei Winkel A, B, C sind also untereinander gleich nach dem Grundsatze: Zwei Gröfsen, die derselben dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich. Da nun die Winkel A, B, C zusammen gleich 180^0 sind, so ist jeder von ihnen gleich 60^0.

11. Aufgabe. Man zeige, daſs die Winkel an der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, das gleiche Katheten hat, je gleich 45^0 sind.

Lösung. Die beiden Winkel an der Hypotenuse sind zusammengenommen gleich 90^0, da der dritte Winkel gleich 90^0 ist. Weil dieselben aber unter sich gleich sind, so ist jeder von ihnen gleich 45^0.

12. Aufgabe. Es soll gezeigt werden, daſs die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks stets spitze Winkel sind.

Lösung. Wären die Winkel gleich 90^0 oder gröſser als 90^0, so wären sie zusammen gleich oder gröſser als 180^0, was nach Lehrsatz 3 nicht möglich ist.

10. Lehrsatz. In jedem Dreieck liegt der gröſsern Seite der gröſsere Winkel gegenüber.

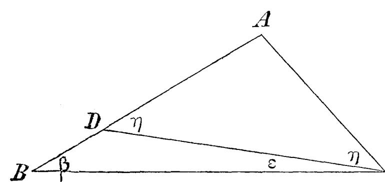


Fig. 30.

Beweis. Die Seite AC (Fig. 30), welche kleiner als AB ist, trage ich von A aus auf AB ab. Den Endpunkt nenne ich D. Verbinde ich nun D mit C, so ist Dreieck ACD ein gleichschenkliges. Ich darf also den Winkel ADC η nennen, wenn ich den Winkel ACD η nenne; Winkel BCD sei noch ε genannt.

Nun ist $\eta = \beta + \varepsilon$, also $\eta > \beta$, und da $\gamma = \varepsilon + \eta > \eta$ ist, so ist um so mehr $\gamma > \beta$.

11. Lehrsatz. In jedem Dreieck liegt dem gröſsern Winkel die gröſsere Seite gegenüber.

Beweis. In dem Dreieck ABC sei $\measuredangle ACB > ABC$. Es soll gezeigt werden, daſs dann $AB > AC$ ist.

Angenommen AB sei nicht gröſser als AC. Dann müſste AB entweder gleich AC oder kleiner als AC sein. Wäre nun $AB = AC$, so wäre $\measuredangle ABC = ACB$; wäre aber $AB < AC$, so wäre $\measuredangle ACB < ABC$. Beides aber ist unmöglich, da das Dreieck so beschaffen ist, daſs $\measuredangle ACB > ABC$ ist.

Da nun AB nicht gleich AC und auch nicht kleiner als AC sein kann, so ist notwendigerweise $AB > AC$.

Besprechung dieses Beweises. Der vorstehende Beweis ist ein indirekter. Indirekte Beweise sind solche, bei denen man nachweist, daſs das Gegenteil von dem, was in dem Satze ausgedrückt wird, nicht statthaben kann.

12. Lehrsatz. In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten gröſser als die dritte.

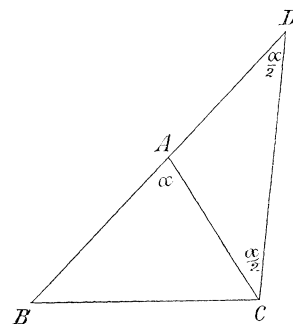


Fig. 31.

Beweis. Ich verlängere AB (Fig. 31) um AC bis zum Punkte D und verbinde D mit C. Dann ist $\triangle\, DAC$ ein gleichschenkliges, somit $\sphericalangle\, ADC = ACD$. Diese beiden Winkel sind aber nach dem Satz vom Auſsenwinkel zusammengenommen gleich α. Folglich ist jeder von ihnen gleich $\frac{\alpha}{2}$. Darum ist Winkel BCD gröſser als BDC und somit nach Lehrsatz 11 $BD > BC$. Es ist aber

$$BD = BA + AD = BA + AC.$$

Darum ist auch $BA + AC > BC$.

Anmerkung. Mit Hülfe des vorhin bewiesenen Satzes ergiebt sich, daſs die gerade Linie der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist.

13. Aufgabe. Man beweise, daſs die Differenz zweier Dreiecksseiten kleiner ist als die dritte Seite.

Lösung. Stellt man dieselbe Figur her wie bei Lehrsatz 10, so findet man, daſs $\sphericalangle\, BDC$ ein stumpfer Winkel ist. Der Winkel η ist nämlich ein spitzer, da er Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks ist. Es ist folglich sein Nebenwinkel ein stumpfer und darum auch gröſser als ε. Nach Lehrsatz 11 ist darum $BC > BD$. BD aber gleich $AB - AC$. Es ist somit $AB - AC < BC$.

Anmerkung. Eine Ungleichheit bleibt richtig, wenn beiderseits dieselbe Gröſse hinzugefügt oder weggenommen wird. Nun war nach Lehrsatz 12 $AB < AC + BC$; nimmt man beiderseits AC weg, so folgt $AB - AC < BC$. Mithin erscheint der zuletzt bewiesene Satz als Folge des vorigen.

§ 11. Die beiden letzten Kongruenzsätze.

13. Lehrsatz (3. Kriterium). Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in den drei Seiten.

Beweis. Die beiden Dreiecke ABC und DEF sind so gewählt, daſs $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$ ist. Um zu zeigen, daſs dieselben kongruent sind, lege man dieselben mit ihren gröſsten Seiten, welche in unserem Falle BC und EF seien, aneinander, so daſs E mit B und F mit C zusammenfällt, und

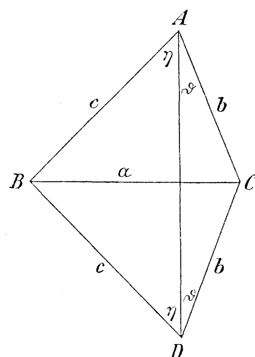


Fig. 32.

verbinde A mit D (Fig. 32). Dann ist $\triangle ABD$ gleichschenklig und ebenso auch ACD. Es ist darum $\sphericalangle BAD = BDA$ und $\sphericalangle CAD = CDA$.
Nach dem Grundsatz über Addition gleicher Gröfsen folgt hieraus:

$$\sphericalangle BAC = BDC.$$

Darum ist $\triangle ABC \cong DBC$ nach dem ersten Kriterium. $\triangle DBC$ ist aber das $\triangle DEF$; folglich ist $\triangle ABC \cong DEF$.

Besprechung dieses Beweises. Der wesentliche Gedanke des vorstehenden Beweises ist die Aneinanderlegung der Dreiecke, so dafs entsprechende Eckpunkte sich decken. Unwesentlich ist die Wahl der gröfsten Seite. Bei der zweiten Durchnahme stelle man fest, welche Abänderungen eintreten, wenn rechtwinklige oder stumpfwinklige Dreiecke nicht mit den gröfsten Seiten aneinander gelegt werden, und führe den Beweis mit Unterscheidung von drei Fällen.

14. Lehrsatz (4. Kriterium). Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem Winkel, welcher der gröfsern von diesen gegenüberliegt.

Beweis. Wir setzen voraus, dafs $AB = DE$ (Fig. 33), $AC = DF$, $\sphericalangle ABC = DEF$ und $AC > AB$ und darum auch

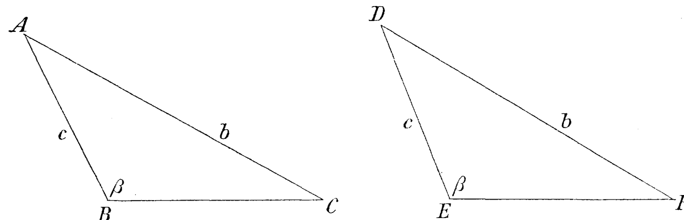


Fig. 33.

$DF > DE$ ist. Wegen des letztern Umstandes müssen dann in den Dreiecken die Winkel ACB und DFE spitze Winkel sein.

Um nun zu zeigen, dafs die Dreiecke kongruent sind, lege ich das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC, dafs DE mit AB zusammenfällt. Dies ist möglich, da $DE = AB$ ist. Da aber $\sphericalangle DEF = ABC$ ist, so fällt EF in die Richtung von BC. Es ist aber von vornherein nicht nötig anzunehmen, dafs F mit C zusammenfällt, da wir nicht wissen, ob $EF = BC$ ist. Es sind im ganzen drei Fälle denkbar.

1. F fällt mit C zusammen. Dann deckt $\triangle\, DEF$ das $\triangle\, ABC$, und die Kongruenz ist erwiesen.

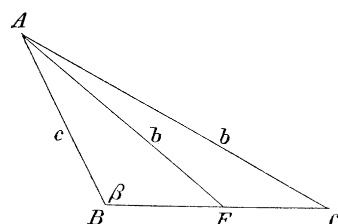


Fig. 34.

2. F fällt zwischen B und C (Fig. 34). Es ist alsdann $\triangle\, AFC$ gleichschenklig. Daraus folgt aber (Aufgabe 12), daſs $\measuredangle\, AFC = ACF$ ein spitzer Winkel, mithin $\measuredangle\, AFB$ ein stumpfer und $AB > AF$ sein muſs. AF ist aber gleich AC. Es muſs also $AB > AC$ sein, was mit der angenommenen Beschaffenheit des Dreiecks ABC nicht vereinbar ist.

Der Punkt F kann also nicht zwischen B und C fallen.

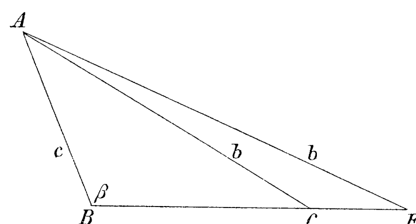


Fig. 35.

3. F fällt auf die Verlängerung von BC (Fig. 35). Dann ist in dem gleichschenkligen Dreieck ACF $\measuredangle\, ACF$ ein spitzer Winkel, also $\measuredangle\, ACB$ stumpf und $AB > AC$. Dies ist nicht möglich. Es kann somit F nicht auf die Verlängerung von BC fallen.

Aus dem Ganzen folgt, daſs F mit C zusammenfallen muſs und daſs somit $\triangle\, ABC \cong DEF$ ist.

Besprechung dieses Satzes. Das vierte Kriterium findet fast ausnahmslos nur für rechtwinklige Dreiecke Verwendung.

Nunmehr, nachdem wir die vier Kriterien bewiesen haben, sind wir im stande, die in der Einleitung gegebenen Lösungen als streng richtig zu erweisen. Dies soll im § 12 geschehen. Zuvor wollen wir Dreiecke entsprechend den vier Kriterien zeichnen.

§ 12. Die vier Grundaufgaben.

Die Aufgaben 15—18 heiſsen Grundaufgaben. Zu ihrer Lösung benutzen wir die Hülfsaufgabe:

14. Aufgabe. An eine Gerade in einem gegebenen Punkte einen gegebenen Winkel anzulegen.

Lösung. Ich beschreibe um den Scheitelpunkt D (Fig. 36) des gegebenen Winkels FDE mit einem beliebigen Radius einen

Kreis. Die Schnittpunkte desselben mit den Schenkeln nenne ich M und N. Mit demselben Radius beschreibe ich um den Punkt A einen Kreis. Den Schnittpunkt mit der gegebenen Geraden nenne ich C. Sodann beschreibe ich um C mit der Strecke MN einen Kreis. Derselbe schneide den vorigen Kreis im Punkte B. Ich verbinde B mit A, und Winkel CAB ist gleich dem gegebenen Winkel FDE.

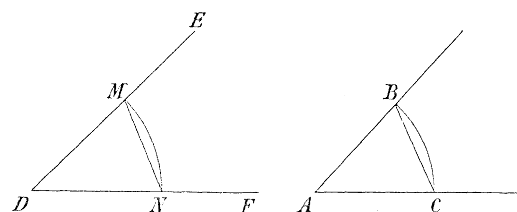


Fig. 36.

Beweis. Verbinde ich C mit B und M mit N, so ist $\triangle CAB \cong NDM$ nach dem dritten Kriterium. Folglich sind in den Dreiecken aufser den Seiten auch die Winkel paarweise gleich. Unter andern ist also auch $\sphericalangle CAB = FDE$.

15. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus zwei Seiten und dem von ihnen gebildeten Winkel.

Lösung. Ich lege a hin, d. h. ich trage auf einer beliebigen Geraden von einem beliebigen Punkte B aus die Strecke a ab. Den zweiten Endpunkt nenne ich C (Fig. 37). Sodann lege ich an BC im Punkte B den Winkel β an. Auf dem freien Schenkel desselben trage ich die Seite c ab, nenne den Endpunkt A, verbinde A mit C, und Dreieck ABC ist das verlangte.

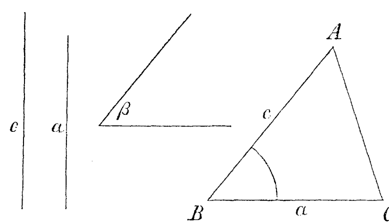


Fig. 37.

16. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.

Lösung. Ich lege die Seite a hin. Sodann lege ich an a in deren Endpunkten B und C (Fig. 38) den Winkel β bezüglich γ an. Der Schnittpunkt A der beiden freien Schenkel ist der dritte Eckpunkt des verlangten Dreiecks.

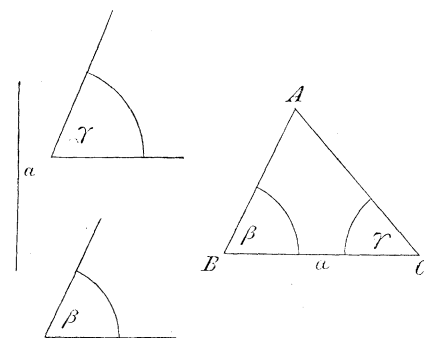


Fig. 38.

17. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus den drei Seiten. Die Lösung findet sich in der Einleitung, Aufgabe 1.

18. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus zwei Seiten und dem Winkel, welcher der gröfsern von diesen Seiten gegenüberliegt.

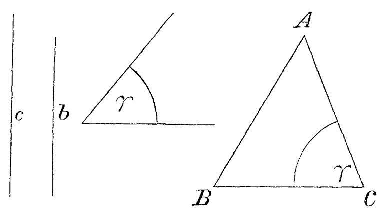


Fig. 39.

Lösung. Ich lege die Strecke b hin. Die Endpunkte nenne ich A und C (Fig. 39). Sodann lege ich an AC im Punkte C den Winkel γ an und beschreibe um A mit c als Radius einen Kreis, welcher den freien Schenkel des Winkels γ im Punkte B schneiden möge. Ich verbinde B mit A, und $\triangle\ ABC$ genügt der Aufgabe.

Besprechung der Lösung. Der um A mit c beschriebene Kreis schneidet den über C hinaus verlängerten Schenkel noch in einem zweiten Punkte, den wir D nennen wollen. In dem durch Verbindung von A mit D hergestellten Dreiecke ist zwar $AD = c$, $AC = b$, aber der Winkel ACD ist nicht gleich γ, sondern gleich $180^0 - \gamma$. Das Dreieck ACD genügt also der Aufgabe nicht (uneigentliche Lösung).

Mit Hülfe vorstehender Grundaufgaben können wir nun Dreiecke zeichnen, welche die in den vier einzelnen Deckungssätzen geforderten Eigenschaften besitzen. Wir können z. B. zwei Dreiecke zeichnen, die in zwei Seiten und dem von ihnen gebildeten Winkel übereinstimmen.

Es empfiehlt sich sehr, Dreiecke dem Wortlaute der Kriterien entsprechend auf Pappdeckel zu zeichnen und sie ausgeschnitten zur Deckung zu bringen.

§ 13. Wiederholung der in der Einleitung gelösten Aufgaben. Beweis der Richtigkeit der Lösungen.

19. Aufgabe. Eine Strecke zu halbieren.

Lösung. Siehe Einleitung, Aufgabe 2.

Beweis. Es ist Fig. 6 $\triangle\ CAD \cong CBD$ (3. Krit.). Daraus folgt, dafs $\measuredangle\ ACD = BCD$ ist. Nun ist auch $\triangle\ AEC \cong BEC$ (1. Krit.) und darum $AE = BE$.

20. Aufgabe. In einem gegebenen Punkte einer Geraden auf derselben eine Senkrechte zu errichten.

Lösung. Siehe Einleitung, Aufgabe 3.

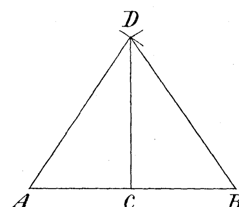


Fig. 40.

Beweis. Verbindet man D mit A und B (Fig. 40), so ist $\triangle\ ACD \cong BCD$ (3. Krit.). Aus der Kongruenz folgt, dafs $\measuredangle\ ACD = BCD$ ist. Da aber beide zusammen gleich 180^0 sind, so ist jeder von ihnen gleich der Hälfte von 180^0, d. h. jeder von ihnen ist gleich 90^0. Die Linie CD steht also senkrecht auf AB.

(Für das Wort „senkrecht" hat man das Zeichen $\perp$.)

21. Aufgabe. Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

Lösung. Siehe Einleitung, Aufgabe 6.

Beweis. Es ist Fig. 24 $\triangle\ AMO \cong ANO$ (3. Krit.). Darum ist $\measuredangle\ MAO = NAO$.

§ 14. Fortsetzung. Andere Aufgaben.

Eine Linie heifst Mittelsenkrechte zu einer Strecke, wenn sie auf derselben in deren Mittelpunkte senkrecht steht.

22. Aufgabe. Auf einer Strecke die Mittelsenkrechte zu errichten.

Lösung. Die Lösung ist ganz gleich derjenigen von Aufgabe 19, § 13.

Beweis. In dem Beweise zur eben erwähnten Aufgabe ist gezeigt, dafs Fig. 6 $\triangle\ AEC \cong BEC$ ist. Darum ist $\measuredangle\ AEC = BEC$, und da beide zusammen 180^0 gleich sind, so ist jeder von ihnen gleich 90^0, d. h. CE ist $\perp\ AB$. Ebenso war bewiesen, dafs $AE = BE$ ist. Darum ist CE Mittelsenkrechte.

Besprechung. Eine Strecke zu halbieren und auf derselben die Mittelsenkrechte zu errichten sind also nach unserer Lösung ganz dieselben Aufgaben.

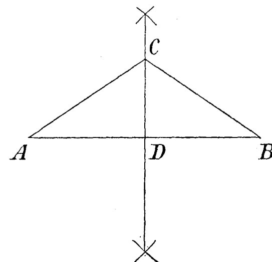


Fig. 41.

23. Aufgabe. Man zeige, dafs jeder Punkt der Mittelsenkrechten von den Endpunkten der Strecke gleiche Entfernung hat.

Herstellung der Figur. Nach der vorigen Aufgabe errichte ich auf der Strecke AB (Fig. 41) die Mittelsenkrechte und verbinde irgend einen Punkt derselben, z. B. C, mit A und B.

Behauptung. $CA = CB$.

Beweis. Nennt man den Fufspunkt der Mittelsenkrechten D, so ist $\triangle\ ADC \cong BDC$; denn es ist $AD = BD$, $CD = CD$ und $\sphericalangle\ ADC = BDC$. Aus der Kongruenz folgt, dafs $CA = CB$ ist.

24. Aufgabe. Man zeige, dafs jeder Punkt aufserhalb der Mittelsenkrechten von den Endpunkten der Strecke ungleiche Entfernungen hat.

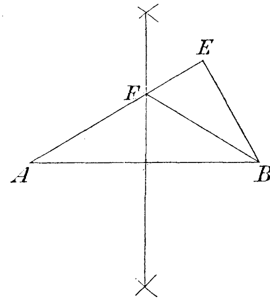


Fig. 42.

Herstellung der Figur. Ich zeichne die Mittelsenkrechte zu AB (Fig. 42) und nehme aufserhalb derselben einen Punkt E an, den ich mit A und B verbinde.

Behauptung. $EA \gtrless EB$ ($\gtrless$ heifst ungleich).

Beweis. Zum Beweise, dafs $EA \gtrless EB$ ist, verbinde ich den Schnittpunkt F auf EA mit B. Dann ist nach Lehrsatz 12

$$BE < EF + FB.$$

Es ist aber nach der vorigen Aufgabe $FB = FA$; folglich ist $BE < EF + FA$ oder $BE < AE$.

Besprechung. Liegt der Punkt E auf der andern Seite der Mittelsenkrechten, so wird in derselben Weise bewiesen, dafs $EB > EA$ ist.

Die beiden vorstehenden Aufgaben lehren, dafs alle Punkte, deren Entfernungen von zwei festen Punkten gleich sind, auf der Mittelsenkrechten zur Verbindungsstrecke der beiden Punkte liegen müssen.

Ein geometrischer Ort ist eine Linie (eine Gerade, ein Kreis), auf der Punkte von derselben Eigenschaft liegen. Hiernach ist:

1. der geometrische Ort für alle Punkte, die von einem festen Punkte gleiche Entfernung haben, ein Kreis um den festen Punkt als Centrum.

2. Der geometrische Ort für alle Punkte, die von zwei festen Punkten gleiche Entfernung haben, ist die auf der Verbindungsstrecke der beiden Punkte errichtete Mittelsenkrechte.

25. Aufgabe. Von einem Punkte auf eine Gerade eine Senkrechte zu fällen.

Lösung. Ich beschreibe mit hinlänglich grofsem Radius um den Punkt C einen Kreis, welcher die Gerade in den Punkten A

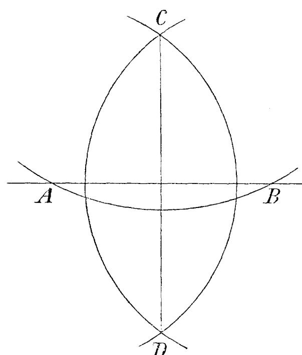


Fig. 43.

und B schneiden möge (Fig. 43). Um A und B beschreibe ich sodann mit einem hinlänglich grofsen, aber sonst beliebigen Radius, z. B. mit AC, Kreise. Der zweite Schnittpunkt heifse D; CD ist $\perp AB$.

Beweis. Der Beweis stimmt mit dem Beweise zur Aufgabe 19, § 13 überein.

Besprechung. Es läfst sich zeigen, dafs nur eine solche Senkrechte möglich ist. Denn wäre noch $CE \perp AB$ (Fig. 44), so kämen in dem Dreieck CDE zwei rechte Winkel vor, was nicht möglich ist. Weil $\measuredangle CDE$ ein rechter Winkel ist, so ist (Lehrsatz 11) $CE > CD$. Also ist die von einem Punkte auf eine Gerade gefällte Senkrechte kleiner als jede andere Verbindungslinie dieses Punktes mit einem Punkte der Geraden.

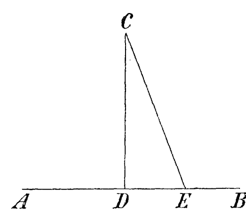


Fig. 44.

Ebenso wie man von einem Punkte auf eine Gerade nur eine Senkrechte fällen kann, läfst sich auch in einem Punkte einer Geraden nur eine Senkrechte errichten.

Ist nämlich $CD \perp AB$ (Fig. 45), und nimmt man an, dafs auch $DE \perp AB$ sei, so müfste $\measuredangle BDE = BDC$ sein, da jeder von ihnen gleich einem rechten wäre. Dies ist aber nicht möglich, da ein Teil nicht dem Ganzen gleich sein kann.

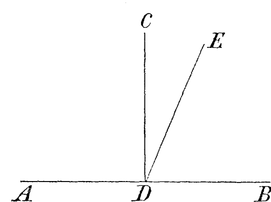


Fig. 45.

Die Länge der Senkrechten, welche man von einem Punkte auf eine Gerade fällen kann, nennt man den Abstand des Punktes von der Geraden.

26. Aufgabe. Es ist zu beweisen, dafs jeder Punkt des Winkelhalbierers von den Schenkeln des Winkels gleichen Abstand hat.

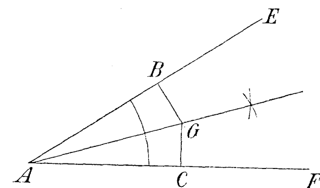


Fig. 46.

Herstellung der Figur. Ich halbiere den Winkel EAF (Fig. 46) und fälle von irgend einem Punkte des Winkelhalbierers, z. B. G, auf die Schenkel die Senkrechten GB und GC.

Behauptung. $GB = GC$.

Beweis. $\triangle\, GAB \cong GAC$ (2. Krit.); daher ist $GB = GC$.

27. Aufgabe. Man beweise, dafs jeder Punkt aufserhalb des Winkelhalbierers von den Schenkeln ungleichen Abstand hat.

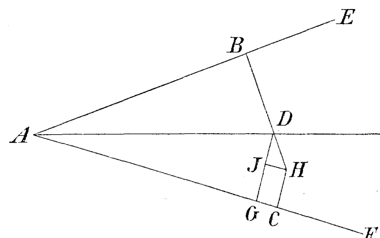


Fig. 47.

Herstellung der Figur. Ich halbiere den Winkel EAF (Fig. 47) und nehme aufserhalb des Winkelhalbierers einen Punkt H an. Von demselben fälle ich auf die beiden Schenkel die Senkrechten HB und HC.

Behauptung. $HB \gtrless HC$.

Beweis. Zum Beweise fälle ich von D, dem Schnittpunkt des Winkelhalbierers mit HB, eine Senkrechte DG auf AF und ziehe HG. Dann ist

$$BH = BD + DH = DG + DH > HG > HC,$$

also um so mehr $BH > HC$.

Besprechung. Läge H auf der andern Seite des Winkelhalbierers, so liefse sich genau so nachweisen, dafs $HC > HB$ ist.

Nach den beiden letzten Aufgaben ist daher:

3. der geometrische Ort für alle Punkte, die von den Schenkeln eines Winkels gleichen Abstand haben, der Winkelhalbierer.

§ 15. Zeichnungsaufgaben.

28. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus a, $b + c$, α.

Lösung. ABC (Fig. 48) sei das verlangte Dreieck. Es ist $BC = a$, $\measuredangle\, BAC = \alpha$. Die Summe $b + c$ stelle ich dadurch her, dafs ich BA über A hinaus um AC oder AC über A hinaus um AB verlängere. Wir wollen das erstere wählen. Den Endpunkt der um AC verlängerten Seite AB nenne ich D, verbinde D mit C, dann ist das $\triangle\, DBC$ zu zeichnen nach der erweiterten vierten Grundaufgabe. Es ist nämlich $BC = a$, $BD = b + c$ und $\measuredangle\, BDC = \frac{\alpha}{2}$. Durch das Dreieck BDC sind zwei Eckpunkte des Dreiecks ABC

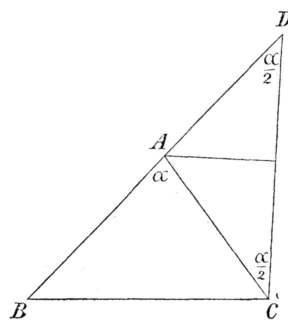


Fig. 48.

gegeben, nämlich B und C. Der dritte Eckpunkt liegt auf BD und der Mittelsenkrechten zu DC, da A von D und C gleiche Entfernung haben mufs.

Um nun das Dreieck ABC zu zeichnen, lege ich zuerst $BD = b + c$ hin und trage an BD im Punkte D den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ an. Dann beschreibe ich um B mit a einen Kreis, welcher den freien Schenkel des Winkels $\frac{\alpha}{2}$ im Punkte C schneiden möge. Schliefslich errichte ich auf CD die Mittelsenkrechte, welche BD in A schneide. ABC ist das Dreieck von verlangter Eigenschaft.

Beweis. Es ist $AC = AD$ (§ 14, Aufgabe 23). Somit ist $AB + AC = AB + AD = b + c$. Da $\triangle DAC$ gleichschenklig ist, so ist $\sphericalangle ACD = ADC = \frac{\alpha}{2}$. $\sphericalangle BAC$ ist aber gleich $ACD + ADC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$. Das Dreieck ABC hat also die vorgeschriebenen Eigenschaften.

Besprechung. Der mit a um B beschriebene Kreis wird den freien Schenkel des Winkels $\frac{\alpha}{2}$ entweder gar nicht treffen oder nur in einem Punkte oder in zwei Punkten, je nachdem der Abstand des Punktes B vom freien Schenkel gröfser, gleich oder kleiner ist als a. Im letzten Falle liefert die Zeichnung zwei, jedoch nur durch die Lage verschiedene Lösungen. Ist $a > b + c$ gegeben, so haben wir einen Widerspruch gegen Lehrsatz 12, und die Lösung wird uneigentlich. Vgl. dazu Aufgabe 31.

Aufgaben. Ein Dreieck zu zeichnen aus:
29. a, $b + c$, β. ***30.*** a, $b + c$, γ. ***31.*** a, $b - c$, α.
32. a, $b - c$, β.

§ 16. Der Parallelismus.

Eine Linie, welche mehrere andere schneidet, heifst Schnittlinie.

Die Linien AB und CD (Fig. 49) seien geschnitten von der Schnittlinie MN. Es entstehen acht Winkel. Je zwei Winkel, die an derselben Seite der Schnittlinie und an derselben Seite der

geschnittenen Linien liegen, heifsen entsprechende Winkel, also α und ε, β und ζ, γ und η, δ und ϑ. Je zwei Winkel, die an verschiedenen Seiten der Schnittlinie und an verschiedenen Seiten der geschnittenen Linien liegen, heifsen Wechselwinkel, also α und ϑ, β und η, γ und ζ, δ und ε. Je zwei Winkel, welche an derselben Seite der Schnittlinie, aber an verschiedenen Seiten der geschnittenen Linien liegen, heifsen Ergänzungswinkel, also α und η, β und ϑ, γ und ε, δ und ζ.

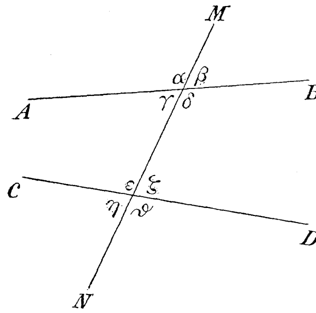


Fig. 49.

15. Lehrsatz. Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, so dafs irgend zwei entsprechende Winkel oder irgend zwei Wechselwinkel gleich sind oder die Summe irgend zweier Ergänzungswinkel gleich 180° ist, so sind alle entsprechenden Winkel und alle Wechselwinkel gleich, und die Summe je zweier Ergänzungswinkel ist gleich 180°.

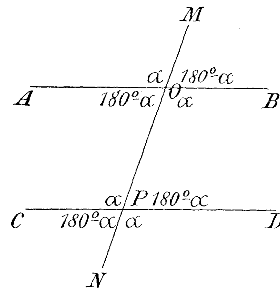


Fig. 50.

Herstellung der Figur. Ich ziehe eine beliebige Gerade AB (Fig. 50) und eine zweite MN, welche die erste im Punkte O schneidet. Den Winkel AOM nenne ich α. An die Gerade MN lege ich nun in einem beliebigen Punkte P den Winkel α als entsprechenden Winkel zu $\measuredangle\ AOM$ an. Den über P hinaus verlängerten freien Schenkel dieses Winkels nenne ich CD.

Behauptung. $\measuredangle\ AOP = CPN$, $\measuredangle\ MOB = OPD$ u. s. w.

Beweis. Die acht Winkel um O und P herum kann man so bezeichnen, wie die Figur angiebt. Daraus ersieht man sofort, dafs alle Wechselwinkel und alle entsprechenden Winkel einander gleich sind und dafs ferner die Summe irgend zweier Ergänzungswinkel gleich 180° ist.

Ebenso wird der Beweis bei dem zweiten und dritten Teil des Satzes geführt.

16. Lehrsatz. Sind für eine Schnittlinie die entsprechenden Winkel oder die Wechselwinkel gleich, oder ergänzen sich die Ergänzungswinkel zu 180°,

so sind für jede Schnittlinie die entsprechenden Winkel gleich u. s. w.

Beweis. Für die Schnittlinie MN seien die entsprechenden Winkel gleich.

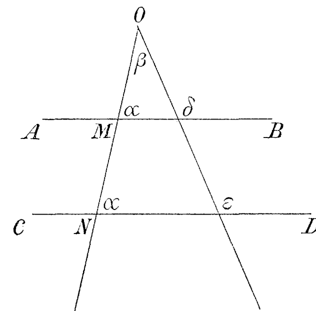


Fig. 51.

Wenn ich dann den Winkel OMB (Fig. 51) α nenne, so darf ich auch Winkel OND α nennen. Es ist nun

$$\delta = \beta + \alpha,$$
$$\varepsilon = \beta + \alpha.$$

Daraus folgt:

$$\delta = \varepsilon.$$

In unserer Fig. 51 schneiden sich die Schnittlinien. Schneiden sich dieselben nicht, so wird der Beweis in folgender Weise geführt:

In der Fig. 52 erkennt man sofort die Richtigkeit der Winkelbenennung. Wenn man nun O mit N verbindet, so wird das Viereck $MNPO$ in zwei Dreiecke geteilt, deren sechs Winkel zusammen den vier Winkeln des Vierecks gleich sind. Darum ist:

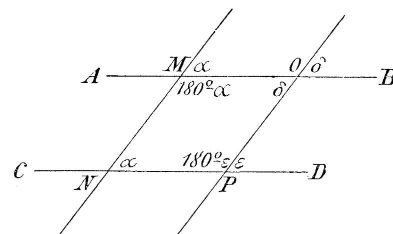


Fig. 52.

$$180^0 - \alpha + \alpha + 180^0 - \varepsilon + \delta = 360^0,$$

oder: $360^0 - \varepsilon + \delta = 360^0$,

oder: $-\varepsilon + \delta = 0$,

d. h. $\delta = \varepsilon$.

Kennzeichen des Parallelseins. Zwei Linien heifsen parallel, wenn zwei entsprechende Winkel oder zwei Wechselwinkel gleich sind oder die Summe zweier Ergänzungswinkel gleich 180^0 ist.

33. Aufgabe. Durch einen Punkt zu einer Geraden eine Parallele zu ziehen.

Erste Lösung. Siehe Einleitung, Aufgabe 5, Fig. 13.

Beweis. Da $\sphericalangle AGE = 90^0$ und $\sphericalangle MAG = 90^0$ ist, so ist $\sphericalangle AGE + MAG = 180^0$. Zwei Ergänzungswinkel haben also 180^0, folglich ist nach vorstehendem Kennzeichen $AM \parallel GC$ ($\parallel$ parallel).

Zweite Lösung. Ich ziehe durch A (Fig. 53) eine beliebige Gerade, welche CD im Punkte F schneiden möge. Den Winkel AFD lege ich an der über A hinaus verlängerten Geraden

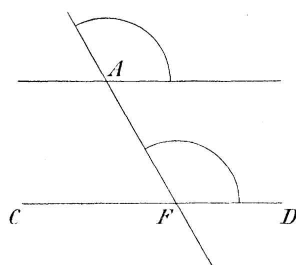


Fig. 53.

als entsprechenden Winkel zu AFD an. Der freie Schenkel dieses Winkels ist parallel zu CD.

Beweis. Die Richtigkeit der Behauptung folgt daraus, dafs zwei entsprechende Winkel gleich sind.

Besprechung der ersten Lösung. Soll man in einem gegebenen Abstand zu einer Geraden eine Parallele ziehen, so geschieht dies durch eine kleine Umänderung der ersten Lösung. Man errichtet auf der Geraden eine Senkrechte und trägt auf derselben den gegebenen Abstand ab. Das Weitere ist dann übereinstimmend mit der erwähnten Lösung.

a) In welchem Punkte man die Senkrechte errichtet, ist ganz gleichgültig. Es läfst sich nämlich zeigen, dafs parallele Linien überall denselben Abstand haben. Fällt man von zwei Punkten E und F der Geraden AB (Fig. 54), welche parallel CD ist, die Senkrechten EG und FH, und verbindet man E mit H, so ist $\triangle EGH \cong HFE$ (2. Krit.). Darum ist $EG = FH$.

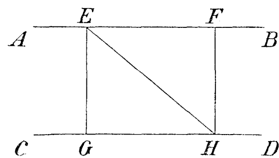


Fig. 54.

Wegen der letztern Eigenschaft paralleler Linien schneiden sich parallele Linien nicht. Denn schnitten sie sich, so hätten sie nicht überall denselben Abstand. Hiernach kann man parallele Linien auch in folgender Weise kennzeichnen: Parallele Linien sind solche Linien, die in derselben Ebene liegen und sich niemals schneiden, soweit man sie auch verlängern mag.

Ferner erkennt man die Richtigkeit des folgenden Satzes:

4. Der geometrische Ort aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden einen bestimmten Abstand haben, ist die im gegebenen Abstand zur Geraden gezogene Parallele.

b) Auch läfst die erste Lösung deutlich erkennen, dafs man durch einen Punkt nur eine Parallele zu einer Geraden ziehen kann, da man eben in A auf AG nur eine Senkrechte errichten kann.

Schliefslich sei bei dieser Besprechung noch ein Mittel angegeben, um durch einen Punkt A zu einer Geraden BC mit Hülfe eines Lineals und Winkelhakens eine Parallele zu ziehen.

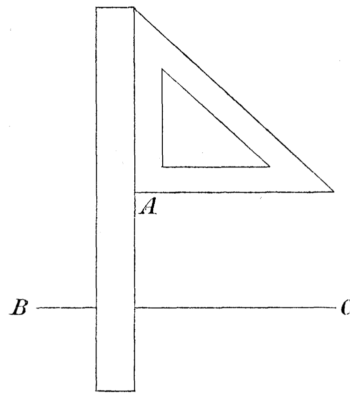


Fig. 55.

Man lege den Winkelhaken so an BC (Fig. 55), dafs die eine Kathete den Punkt A neben sich hat. An diese Kathete lege man das Lineal und verschiebe nun den Winkelhaken bis etwas über A hinaus. Ein Strich der andern Kathete entlang giebt dann die Parallele zu BC.

17. Lehrsatz. Zwei Linien, welche derselben dritten parallel sind, sind auch unter sich parallel.

Herstellung der Figur. Man ziehe $AB \parallel EF$ und $CD \parallel EF$ (Fig. 56).

Behauptung. $AB \parallel CD$.

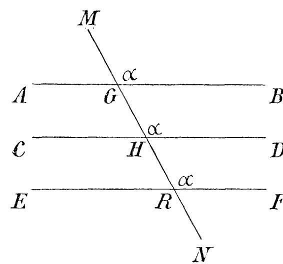


Fig. 56.

Beweis. Ich schneide die drei Geraden durch eine vierte MN. Die Schnittpunkte seien G, H, R. Nenne ich nun den Winkel MGB α, dann bin ich auch berechtigt, die Winkel MRF und MHD α zu nennen. Folglich ist, da $\measuredangle MGB = MHD$ ist, $AB \parallel CD$.

Anmerkung. Diese ganze Theorie ist aufgebaut auf Lehrsatz 3. Gegen den Beweis desselben sind Einwendungen zulässig. Denn dieselbe Schlufskette auf eine Kugel, ein Ellipsoid u. s. w. angewandt, führt nachweislich zu einem falschen Ergebnis. Diesen Schwierigkeiten geht man aus dem Wege, wenn man als Grundsatz annimmt: Durch einen Punkt kann man zu einer gegebenen Geraden nur **eine** Parallele ziehen. Vgl. übrigens W. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie. Bd. I. Paderborn 1893.

Lehraufgabe der Untertertia.

§ 17. Von den Vierecken im allgemeinen.

Legt man zwei Dreiecke, welche eine gleiche Seite haben, aneinander, so entsteht im allgemeinen ein Viereck.

Die Verbindungslinie zweier nicht unmittelbar benachbarter Eckpunkte heifst Diagonale. Ein Viereck hat zwei Diagonalen.

18. Lehrsatz. Die Summe der Winkel eines Vierecks ist gleich 360^0.

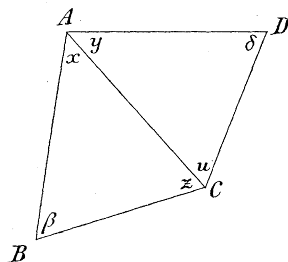


Fig. 57.

Beweis. Zum Beweise zerlege ich das Viereck $ABCD$ durch eine Diagonale, etwa durch AC, in zwei Dreiecke. Nach Fig. 57 ist nun

$x + \beta + z = 180^0$,

$y + \delta + u = 180^0$ und darum

$x + \beta + z + y + \delta + u = 360^0$

oder $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$.

Einen zweiten und dritten Beweis erhält man, wenn man einen beliebigen Punkt im Viereck mit den vier Eckpunkten verbindet, oder wenn man wie bei Lehrsatz 3 um das Viereck herumgeht.

Die Bezeichnung der einzelnen Stücke am Viereck erkennt man aus umstehender Fig. 58.

Aufgaben. Vorbemerkung. Zur Zeichnung eines Dreiecks waren drei voneinander unabhängige Angaben erforderlich und ausreichend. Beim Viereck sind deren fünf erforderlich.

Die folgenden Beispiele werden dies zeigen [1].

---

[1] Die Bezeichnungen sind durch Fig. 58 erklärt. $\measuredangle\, ef$ z. B. ist der von e und f gebildete Winkel.

34. a, b, c, d, β. ABC ist nach der ersten Grundaufgabe zu zeichnen. D ist der Schnittpunkt der Kreise, die um A mit d und um C mit c beschrieben werden.

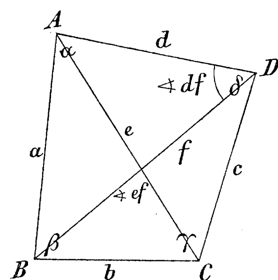


Fig. 58.

35. $a, \beta, \sphericalangle\, ae, d, c$. ABC ist nach der zweiten Grundaufgabe zu zeichnen.

36. a, b, e, d, c. Man zeichne ABC nach der dritten Grundaufgabe.

37. a, β, e, d, c. ABC kann nach der vierten Grundaufgabe gezeichnet werden.

38. a, b, e, f, d. ***39.*** $a, b, \beta, \alpha, \gamma$. ***40.*** a, b, c, e, f. ***41.*** $a, b, \alpha, \gamma, \delta$. $\sphericalangle\, ABC$ ist gleich $360^0 - \alpha - \gamma - \delta$.

Diese Aufgaben sind in Worte zu fassen.

42. Man berechne die Winkelsumme eines Fünfecks, Sechsecks u. s. w.

§ 18. Besondere Vierecke.

Ein Parallelogramm ist ein Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten parallel sind.

19. Lehrsatz. In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel gleich.

Herstellung der Figur. Ich zeichne ein Parallelogramm, indem ich auf den Schenkeln eines Winkels mit dem Scheitel A (Fig. 59) je einen beliebigen Punkt, etwa B und D, herausgreife und durch dieselben zu den Schenkeln Parallele ziehe (siehe Aufgabe 33). Das entstandene Viereck ist nach der obigen Erklärung ein Parallelogramm, da die gegenüberliegenden Seiten parallel sind. Es ist also:

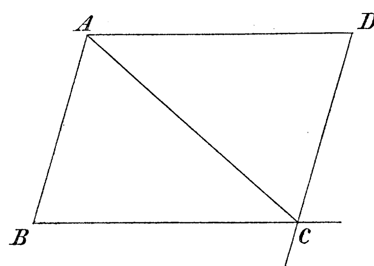


Fig. 59.

Voraussetzung. $AB \parallel DC,\ AD \parallel BC$.

Behauptung. 1. $AD = BC,\ AB = DC$.
2. $\sphericalangle\, BAD = DCB,\ \sphericalangle\, ABC = CDA$.

Beweis. Ziehe ich eine Diagonale, etwa AC, dann ist Dreieck $ABC \cong CDA$; denn es ist $AC = AC$, $\sphericalangle\, BAC = DCA$ als Wechselwinkel bei den von AC geschnittenen Parallelen AB und DC. Aus gleichem Grunde ist auch $\sphericalangle\, BCA = DAC$. Aus der

Kongruenz folgt, daſs $AD = BC$ und $AB = DC$ ist. Ferner ist auch $\measuredangle\, ABC = CDA$, und da noch die beiden Winkel an A den entsprechenden Winkeln bei C gleich sind, so folgt, daſs auch $\measuredangle\, BAD = DCB$ ist. Der Beweis zu 2. ergiebt sich auch wie folgt:

Bezeichne ich den Winkel A mit α, so ist sowohl Winkel B als auch Winkel D gleich $180^0 - \alpha$, da jeder von ihnen Ergänzungswinkel zu α ist. Winkel C ist ferner als Ergänzungswinkel zu Winkel B oder D gleich α. Wir sehen also, daſs $\measuredangle\, A = C$ und $\measuredangle\, B = D$ ist.

43. Aufgabe. Der Lernende stelle aus steifem Papier ein Parallelogramm her und zerschneide dasselbe längs einer Diagonale. In welcher Weise können dann die Dreiecke im allgemeinen nur zur Deckung gebracht werden?

20. Lehrsatz. In einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen.

Voraussetzung. $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$[1].

Behauptung. $AO = OC$, $BO = OD$.

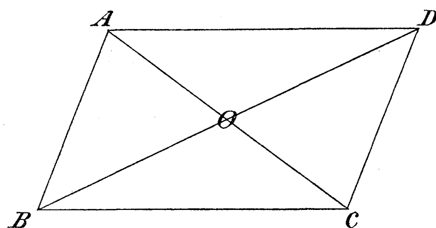


Fig. 60.

Beweis. Es ist $\triangle\, AOD \cong COB$ (Fig. 60); denn es ist $AD = BC$ als gegenüberliegende Seiten in einem Parallelogramm, $\measuredangle\, OAD = OCB$ und $\measuredangle\, ODA = OBC$ als Wechselwinkel bei den von AC bezw. BD geschnittenen Parallelen AD und BC.

Aus der Kongruenz folgt, daſs $AO = OC$ und $BO = OD$ ist.

21. Lehrsatz. Sind in einem Viereck die gegenüberliegenden Seiten gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

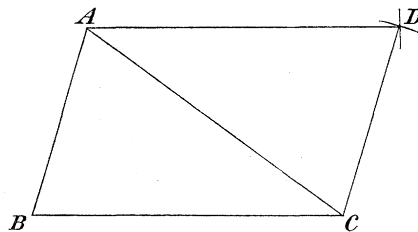


Fig. 61.

Voraussetzung. $AB = DC$, $AD = BC$.

Behauptung. $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$.

Beweis. Zum Beweise ziehe ich eine Diagonale, etwa AC (Fig. 61). Dann ist Dreieck

[1] Der Lernende unterlasse es nicht, zu diesem und den folgenden Lehrsätzen die Herstellung der Figur anzugeben.

$ABC \cong CDA$ (3. Krit.). Daraus folgt, dafs $\measuredangle\, DAC = BCA$ und $\measuredangle\, BAC = DCA$ ist; d. h. es ist $AD \parallel BC$ und $AB \parallel DC$.

22. Lehrsatz. Sind in einem Viereck die gegenüberliegenden Winkel gleich, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

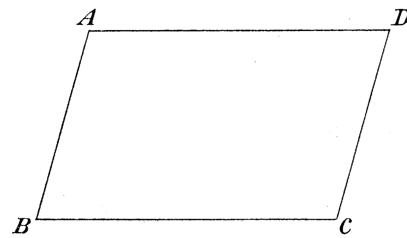


Fig. 62.

Voraussetzung. In der nebenstehenden Fig. 62 ist $\measuredangle\, A = C$, $\measuredangle\, B = D$.

Behauptung. $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$.

Beweis. Es ist $\measuredangle\, A + B + C + D = 360^0$, und da $\measuredangle\, A = C$ und $\measuredangle\, D = B$, so folgt $\measuredangle\, 2\,A + 2\,B = 360^0$ oder $\measuredangle\, A + B = 180^0$. Darum ist nach dem Kennzeichen § 16 $AD \parallel BC$. Da $\measuredangle\, A + B = 180^0$ ist, so ist auch $\measuredangle\, A + D = 180^0$ und somit aus demselben Grunde wie vorhin $AB \parallel DC$.

44. Aufgabe. Man zeichne zwei Winkel mit parallelen Schenkeln und zeige, dafs dieselben entweder gleich sind oder sich zu 180^0 ergänzen.

Anleitung. Man verlängere die Schenkel des einen Winkels über den Scheitel hinaus und wende dann Lehrsatz 19 an.

45. Aufgabe. Wie ist für den vorhergehenden Lehrsatz die Figur herzustellen?

23. Lehrsatz. Halbieren sich in einem Viereck die Diagonalen, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Voraussetzung. $AO = OC$, $BO = OD$.

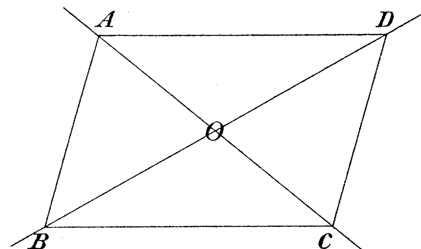


Fig. 63.

Behauptung. $AD \parallel BC$, $AB \parallel DC$.

Beweis. Es ist Dreieck $AOD \cong COB$ (1. Krit.) und darum $\measuredangle\, OAD = OCB$ (Fig. 63). Somit ist $AD \parallel BC$, da zwei Wechselwinkel gleich sind.

Ferner ist $\triangle\, AOB \cong COD$ (1. Krit.) und darum $\measuredangle\, OAB = OCD$, d. h. es ist auch $AB \parallel CD$.

24. Lehrsatz. Sind in einem Viereck zwei Seiten gleich und parallel, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Voraussetzung. $AD \# BC$[1].

Behauptung. $AB \parallel DC$.

Beweis. Es ist, wenn A mit C verbunden wird, Dreieck $ABC \cong CDA$; denn es ist $AD = BC$, $AC = AC$ und $\measuredangle DAC = BCA$. Diese Winkel sind nämlich Wechselwinkel bei den von AC geschnittenen Parallelen AD und BC. Weil nun infolge der Kongruenz $\measuredangle ACD = CAB$ ist, so folgt, daſs $AB \parallel DC$ ist, weil zwei Wechselwinkel gleich sind.

1. Übungslehrsatz. Es ist zu zeigen, daſs in einem Parallelogramm alle Winkel rechte sind, wenn einer ein rechter ist.

Anleitung. Der Beweis kann erbracht werden mit Hülfe des Lehrsatzes 19 oder der Aufgabe 44.

Ein Rechteck ist ein Parallelogramm, in welchem die Winkel sämtlich rechte Winkel sind. Man zeichne ein Rechteck.

Ein Rhombus ist ein Parallelogramm, dessen Seiten gleich sind. Man zeichne einen Rhombus.

Ein Quadrat ist ein Rechteck mit gleichen Seiten. Man zeichne ein Quadrat.

2. Übungslehrsatz. In jedem Rechteck sind die Diagonalen einander gleich.

Anleitung. Zieht man im Rechteck $ABCD$ die Diagonalen, so werden die Dreiecke ABC und DCB kongruent.

46. Aufgabe. Welche Figur entsteht, wenn man ein rechtwinkliges Dreieck so umlegt, daſs die Endpunkte einer Kathete die Plätze wechseln?

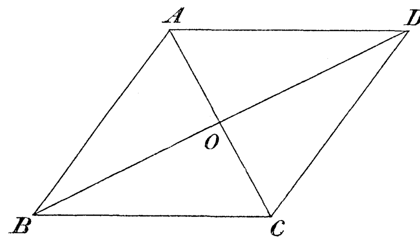


Fig. 64.

3. Übungslehrsatz. In einem Rhombus stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.

Anleitung. Zieht man die Diagonalen, so entstehen vier kongruente Dreiecke. Siehe Fig. 64.

[1] Das Zeichen $\#$ bedeutet gleich und parallel.

Da ein Quadrat zugleich ein Parallelogramm, Rechteck und Rhombus ist, so gelten alle über diese Vierecke aufgestellten Lehrsätze auch für das Quadrat.

47. Aufgabe. Zieht man in einem Rhombus oder Quadrat eine Diagonale, so kann man die beiden entstandenen Dreiecke durch Umklappen um die Diagonale zur Deckung bringen. Welche Eigenschaft der Diagonalen in Beziehung auf die Winkel des Rhombus oder des Quadrats folgt hieraus? (Vgl. Aufgabe 43.)

Erklärung. Der Abstand zwischen den parallelen Seiten eines Parallelogramms wird Höhe genannt.

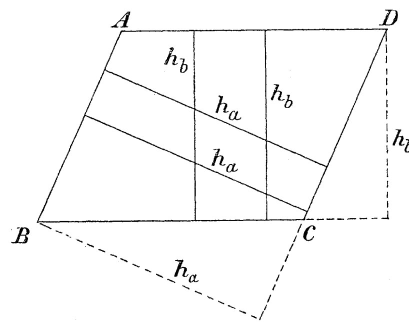


Fig. 65.

Ein Parallelogramm hat zwei verschiedene Höhen, h_a und h_b, wie Fig. 65 zeigt. Ein Rechteck hat ebenfalls zwei verschiedene Höhen. Man ziehe dieselben und bestimme ihre Gröfse.

4. Übungslehrsatz. In einem Rhombus sind die Höhen einander gleich.

Man fälle von D und B (Fig. 65) auf die gegenüberliegenden Seiten die Senkrechten und beweise die Gleichheit der Höhen durch Deckung der beiden entstandenen Dreiecke.

Aufgaben. Ein Parallelogramm zu zeichnen aus: ***48.*** a, b, β. ***49.*** $b, \beta, \measuredangle\, be$. ***50.*** a, b, e. ***51.*** b, β, e.

Man zeichne hierbei ABC nach einer der vier Grundaufgaben und ergänze dann dasselbe zu einem Parallelogramm.

52. $e, f, \measuredangle\, ef$. Lehrsatz 20.

53. a, h_a, e. Man ziehe zuerst zwei Parallele im Abstande h_a, trage auf der einen die Strecke $AB = a$ ab und beschreibe um A mit e einen Kreis.

54. a, h_a, f. Der vorigen Aufgabe ähnlich.

55. a, h_b, f.

56. a, h_a, h_b. Man zeichne ABE, worin $AB = a$, $AE = h_b$ und $\measuredangle\, AEB = 90^0$ ist. Dann ziehe man zu AB im Abstande h_a eine Parallele.

Aufgaben. Ein Rechteck zu zeichnen aus: ***57.*** a, b. ***58.*** a, e. ***59.*** $a + b, e$. ***60.*** $a - b, e$.

Man stelle bei den beiden letzten Aufgaben $a + b$ bezüglich $a - b$ her. Vgl. § 15.

Aufgaben. Einen Rhombus zu zeichnen aus: ***61.*** *a, e.* ***62.*** *e, f.* ***63.*** *a, h.*

Aufgaben. Ein Quadrat zu zeichnen aus: ***64.*** *a.* ***65.*** *e.* Man bestimme zuerst die Gröſse der Winkel an *e*.

25. Lehrsatz. Zieht man durch den Mittelpunkt einer Dreiecksseite zur Grundlinie eine Parallele, so halbiert dieselbe die andere Seite und ist gleich der halben Grundlinie.

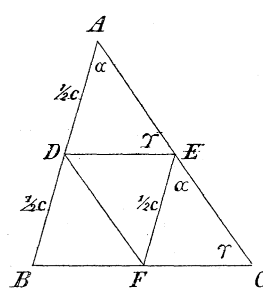


Fig. 66.

Herstellung der Figur. Ich halbiere die Seite AB (Fig. 66) und ziehe durch den Mittelpunkt D zu BC die Parallele DE.

Voraussetzung. $AD = DB$, $DE \parallel BC$.

Behauptung. $AE = CE$, $DE = \frac{1}{2} BC$.

Beweis. Ich ziehe durch E zu AB eine Parallele, welche BC in F schneiden möge. Dann ist $\triangle ADE \cong EFC$. Es ist nämlich $BD = EF = \frac{1}{2} c$, und da auch $AD = \frac{1}{2} c$ ist, $AD = EF$. Nennt man $\sphericalangle DAE\ \alpha$ und $\sphericalangle BCA\ \gamma$, so ist $\sphericalangle FEC = \alpha$ und $\sphericalangle DEA = \gamma$. Diese Gleichheit folgt aus der Gleichheit der Winkel bei parallelen Linien oder auch aus Aufgabe 44. Es ist somit $AE = CE$.

Da ferner $BDEF$ ein Parallelogramm ist, so folgt, daſs $DE = BF$ ist. Da aber auch $DE = FC$, so ist $BF = FC$. F ist also der Mittelpunkt von BC, und da $DE = FC$ ist, so ist $DE = \frac{1}{2} BC$.

66. Aufgabe. Verbindet man in der vorigen Figur F mit D, so erhalten wir im ganzen vier kongruente Dreiecke. Wie muſs man hiernach vier kongruente Dreiecke aneinanderlegen, um ein einziges zu erhalten?

67. Aufgabe. An der Figur zu Lehrsatz 25 bezeichne man sämtliche Strecken und Winkel durch a, b, c, α, β, γ.

Die Figur $BDEC$ heiſst Paralleltrapez.

Ein Paralleltrapez ist ein Viereck, in welchem zwei Seiten parallel sind.

68. Aufgabe. Ist das vorhin genannte Paralleltrapez ein besonderes und inwiefern?

26. Lehrsatz. Verbindet man die Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten, so ist die Verbindungslinie zur dritten parallel.

Beweis. In der nebenstehenden Fig. 67 sei $AD = BD$ und $AE = CE$; dann ist $DE \parallel BC$. Denn wäre DE nicht parallel zu BC, so könnte man durch D zu BC eine Parallele DF ziehen. Dann müfste aber AF nach dem vorigen Lehrsatze gleich der Hälfte von AC sein, was nicht möglich ist, da AE gleich der Hälfte von AC ist.

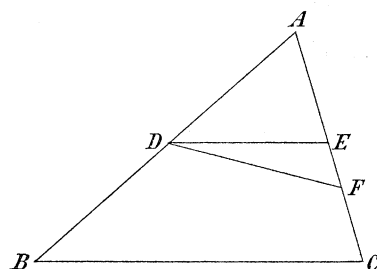


Fig. 67.

Anmerkung. Man vergleiche die Bemerkung § 10 über den indirekten Beweis.

69. Aufgabe. Gegeben ein Winkel ABC und zwischen den Schenkeln ein Punkt P. Man ziehe durch den Punkt eine Gerade, so dafs das zwischen den Schenkeln liegende Stück durch den Punkt gehälftet wird.

Anleitung. Man suche zu bewirken, dafs Punkt P der Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms wird, von welchem eine Ecke vorliegt.

70. Aufgabe. Welche Figur entsteht, wenn man die Seiten eines beliebigen Vierecks halbiert und die erhaltenen Punkte der Reihe nach verbindet?

Zu beantworten durch Lehrsatz 26.

71. Aufgabe. Welche Figur entsteht, wenn man durch die Ecken eines Dreiecks zu den Gegenseiten Parallele zieht? Wie grofs sind die Seiten der Figur, ausgedrückt durch die Seiten des ursprünglichen Dreiecks?

72. Aufgabe. Man beantworte dieselbe Frage bezüglich eines Rechtecks, durch dessen Ecken Parallele zu den Diagonalen gezogen werden.

Erklärung. **Mittellinie** eines Dreiecks ist die Verbindungslinie eines Eckpunktes mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite.

73. Aufgabe. Welche Figur entsteht, wenn man jede Mittellinie eines Dreiecks um sich selbst verlängert und die so erhaltenen Endpunkte mit den Ecken verbindet?

74. Aufgabe. Welche Figur entsteht, wenn man in einem Dreieck durch den Fuſspunkt eines Winkelhalbierers Parallele zu den Dreiecksseiten zieht?

75. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus b, c, t_a (t_a ist die Mittellinie zu a; entsprechende Linien bezeichnen t_b und t_c).

Anleitung. Man verlängere t_a um sich selbst. Ein Teildreieck des entstandenen Parallelogramms läſst sich aus $b, c, 2\,t_a$ zeichnen.

Man merke als wichtig für die Lösung vieler Aufgaben: Ist eine Mittellinie gegeben, so verlängere man dieselbe um sich selbst über die Seitenmitte hinaus.

Erklärung. Eine Figur hat einen Mittelpunkt, wenn es in derselben einen Punkt giebt von der Art, daſs jede durch ihn hindurch gezogene Gerade durch die Begrenzung der Figur halbiert wird.

Hiernach hat der Kreis auch in dieser weitern Bedeutung genommen einen Mittelpunkt.

5. Übungslehrsatz. Ein Parallelogramm hat einen Mittelpunkt, und zwar ist er der Schnittpunkt der Diagonalen.

Anleitung. Man ziehe durch den Schnittpunkt der Diagonalen eine beliebige Linie. Dann ist mit Hülfe des zweiten Kriteriums zu zeigen, daſs kongruente Dreiecke vorliegen.

6. Übungslehrsatz. Man zeige, daſs ein Dreieck keinen Mittelpunkt besitzt.

Anleitung. Man nehme an, daſs P Mittelpunkt des Dreiecks sei, und ziehe durch ihn zwei geeignete Geraden. Dieselben bestimmen zwei Dreiecke, die nach dem ersten Kriterium kongruent wären. Daraus würde folgen, daſs zwei Dreiecksseiten parallel sein müſsten.

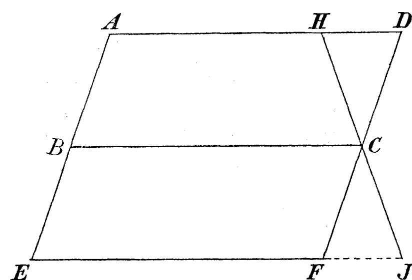


Fig. 68.

76. Aufgabe. Man lege zwei kongruente Parallelogramme mit einer gleichen Seite aneinander, wie es in Fig. 68 geschehen ist. Sodann ziehe man durch C eine beliebige Gerade und zeige mit Hülfe des zweiten Kriteriums, daſs zwei kongruente Dreiecke abgeschnitten werden.

77. Aufgabe. Wie kann man in Fig. 68 aus $AEFD$ ein Paralleltrapez herstellen?

78. Aufgabe. Man lege das Dreieck ABC um, so dafs zwar A nach derselben Seite von BC zu liegen kommt, aber B und C ihre Plätze wechseln. Es ist zu zeigen, dafs die entstandene Figur ein Paralleltrapez ist. Die Diagonalen und nicht parallelen Seiten desselben sind gleich.

Anleitung. Der Beweis wird geführt, wenn man die Winkel der Figur durch die Dreieckswinkel ausdrückt.

Diese fruchtbare Methode nennt man die Methode der Winkelberechnung.

79. Aufgabe. Ein Paralleltrapez zu zeichnen, wenn die nicht parallelen und der Unterschied der parallelen Seiten nebst einer Diagonale gegeben sind.

Anleitung. Man stelle den Unterschied her, indem man eine Parallele durch einen Endpunkt der parallelen Seite zur Gegenseite zieht.

80. Aufgabe. Von einem Dreieck soll durch eine zur Grundlinie gezogene Parallele ein Trapez abgeschnitten werden, so dafs die Parallele gleich der Summe der nicht parallelen Seiten wird.

Anleitung. Man halbiere die Winkel an der Grundlinie.

81. Aufgabe. Eine Strecke in drei, vier u. s. w. gleiche Teile zu teilen.

Lösung. Durch den Endpunkt A der Strecke AB (Fig. 69) ziehe man eine beliebige Linie AX und trage auf derselben von A aus drei beliebig grofse, aber gleiche Strecken nacheinander ab. Den letzten Teilpunkt M verbinde man mit B und ziehe durch die übrigen Teilpunkte zu BM Parallele. Dieselben teilen AB in drei gleiche Teile. Um AB in vier u. s. w. gleiche Teile zu teilen, verfährt man ganz ähnlich.

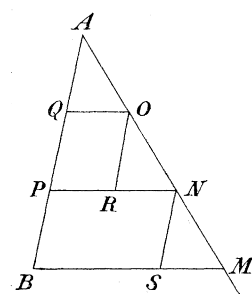


Fig. 69.

Beweis. Zieht man die Parallelen OR, NS, so ist aus gleichen Gründen wie bei Lehrsatz 25 $\triangle AQO \cong ORN \cong NSM$, und hieraus folgt wie früher $AQ = QP = PB$.

82. Aufgabe. Wie läfst sich ein Dreieck in neun kongruente zerlegen?

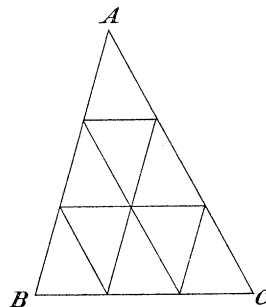


Fig. 70.

Anleitung. Man teile eine der Dreiecksseiten, z. B. AB (Fig. 70), in drei gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte zu BC Parallele. Das Weitere ist aus der Figur ersichtlich.

83. Aufgabe. Wie lautet die Verallgemeinerung der vorigen Aufgabe?

84. Aufgabe. Welche Winkel sind wir im stande jetzt zu zeichnen?

Antwort. Winkel von 90^0 und 60^0 sowie diejenigen Winkel, welche durch Vervielfachen und Teilung durch 2 aus jenen abgeleitet werden können. Es sind also Winkel von 90^0, 180^0, 360^0, 45^0, $22^0 30'$, $11^0 15'$, $5^0 37',5$ u. s. w. herstellbar.

85. Aufgabe. Einen rechten Winkel in drei gleiche Teile zu teilen.

Anleitung. Der dritte Teil von 90^0 ist 30^0 und somit nach der vorigen Aufgabe zu zeichnen. Man stelle ein gleichseitiges Dreieck her, von dem ein Eckpunkt mit dem Scheitel und eine Seite mit dem einen Schenkel des rechten Winkels zusammenfällt. Dann halbiere man den Winkel des Dreiecks.

86. Aufgabe. Welche Winkel kann man überhaupt mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile teilen?

Antwort. Nur solche Winkel kann man in drei gleiche Teile teilen, welche das Dreifache von einem Winkel sind, den wir zeichnen können. Solche Winkel sind also z. B. diejenigen von 45^0, $67^0 30'$, 135^0, $33^0 45'$.

Bemerkung. Später werden wir noch einige Gruppen Winkel angeben, die gezeichnet werden können. Winkel, welche das Dreifache von jenen sind, können natürlich auch in drei gleiche Teile geteilt werden.

Die allgemeine Aufgabe, jeden Winkel mit Hülfe von Zirkel und Lineal, d. h. durch Kreis und gerade Linie in drei gleiche Teile zu teilen, hat man von alters her zu lösen unternommen. Die Unmöglichkeit dieser Lösung hat man erst in neuerer Zeit erkannt.

87. Aufgabe. Ein regelmäſsiges Sechseck zu zeichnen.

Lösung. Regelmäſsig heiſst ein Vieleck, wenn in demselben alle Winkel und alle Seiten unter sich gleich sind. Um nun ein regelmäſsiges Sechseck zu zeichnen, ziehe ich von demselben Punkt sechs Gerade, so daſs der Winkel zwischen je zwei aufeinander folgenden 60^0 ist. Dies ist möglich, da wir einen Winkel von 60^0

zeichnen können, und da die sechs Winkel den Winkelraum um den Punkt ausfüllen. Dann beschreibe ich um den Punkt mit einem beliebigen Radius einen Kreis und verbinde die Schnittpunkte desselben mit den Geraden der Reihe nach miteinander. Die erhaltene Figur ist ein regelmäſsiges Sechseck.

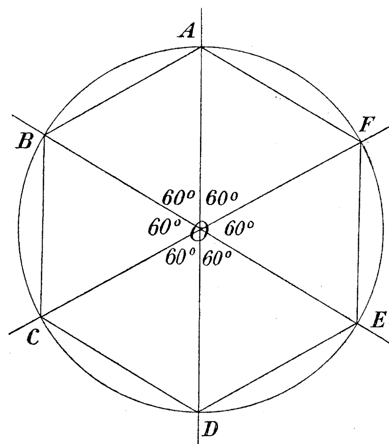


Fig. 71.

Beweis. Die sechs Dreiecke (Fig. 71) sind kongruent nach dem ersten Kriterium. Daraus folgt, daſs die Seiten AB, BC u. s. w. gleich sind. Ferner sind die sechs Dreiecke gleichseitig, und darum ist $\measuredangle ABC = BCD = 120^0$ u. s. w.

Erklärung. Wenn es in einer Figur einen Punkt giebt, der von den Ecken gleich weit entfernt ist, so läſst sich um die Figur ein Kreis beschreiben. Die Figur heiſst dann Kreisfigur. Das regelmäſsige Sechseck ist also eine Kreisfigur.

88. Aufgabe. Ein regelmäſsiges Viereck zu zeichnen.

Anleitung. Man ziehe zwei senkrechte Gerade. Das Übrige ist ähnlich wie bei Aufgabe 87.

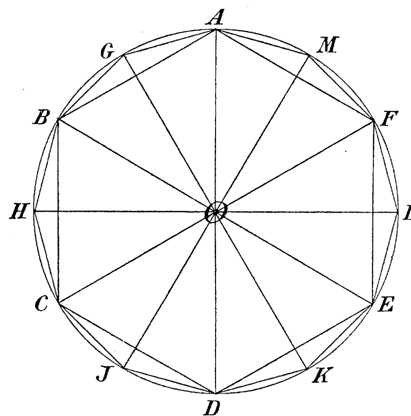


Fig. 72.

89. Aufgabe. Ein regelmäſsiges Zwölfeck, Achteck, Sechzehneck, Vierundzwanzigeck u. s. w. zu zeichnen.

Anleitung. Man halbiere (Fig. 72) die Winkel um O herum.

90. Aufgabe. Hat das regelmäſsige Sechseck einen Mittelpunkt?

Unter den allgemeinen Vierecken ist eines der wichtigsten dasjenige, welches zwei gegenüberliegende rechte Winkel hat. Man stelle ein solches her und beweise den

27. Lehrsatz. Wenn zwei rechtwinklige Dreiecke ABC und ABD in der Hypotenuse AB übereinstimmen, aber $AD > AC$ ist, so ist $DB < CB$.

Anleitung. Man lege die Dreiecke mit der Hypotenuse AB aneinander, verbinde D mit C und nenne $\sphericalangle ADC\ \alpha$ und $\sphericalangle ACD\ \beta$. Dann ist, da $AD > AC$ ist, $\beta > \alpha$. Ferner ist $\sphericalangle CDB = 90^0 - \alpha$ und $DCB = 90^0 - \beta$. Da aber $\alpha < \beta$, so ist $\sphericalangle CDB > DCB$, woraus $BC > DB$ folgt.

91. Aufgabe (Übungssatz). Errichtet man in einem rechtwinkligen Dreieck zu der einen Kathete eine Mittelsenkrechte, so trifft dieselbe die Hypotenuse in einem Punkte, der von den Eckpunkten gleiche Entfernung hat.

Anleitung. Der Beweis ergiebt sich mit Hülfe des Lehrsatzes 25 und der Aufgabe 23.

92. Aufgabe. Man zeige mit Hülfe der vorigen Aufgabe, daſs die Figur zu Lehrsatz 27 ein Kreisviereck ist.

93. Aufgabe. Welche Figur erhält man, wenn man zwei kongruente Dreiecke mit gleichen Seiten aneinanderlegt? Welche Figuren können in derselben Weise aus drei, vier, fünf u. s. w. kongruenten Dreiecken gebildet werden? Der Lernende stelle zehn derselben durch Probieren her und zeichne nur die Umrisse der Ganzfigur.

§ 19. Die Lehre vom Kreise.

I. Teil.

Erklärungen[1]. Ein Centriwinkel ist ein Winkel, dessen Schenkel Radien eines Kreises sind.

Ein Peripheriewinkel ist ein Winkel, dessen Schenkel Sehnen sind, die von einem Punkte der Peripherie ausgehen.

Ein Segment, Kreisabschnitt, ist ein von einer Sehne und dem zugehörigen Kreisbogen begrenzter Teil des Kreises.

Ein Kreissektor, Kreisausschnitt, ist ein von zwei Radien und dem zugehörigen Bogen begrenzter Teil des Kreises.

Zu einem Bogen gehört nur ein Centriwinkel.

Ein Centriwinkel hat ebensoviel Winkelgrade, wie der zugehörige Bogen Bogengrade hat. Dies folgt aus dem Inhalt des § 6. Zu gleichen Centriwinkeln gehören demnach gleiche Bogen, und umgekehrt zu gleichen Bogen gleiche Centriwinkel.

---

[1] Diese und die § 3 gegebenen Erklärungen sind oft zu wiederholen, aber nicht auswendig zu lernen, da der öftere Gebrauch sie ohnehin fest einprägt.

28. Lehrsatz. Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Centriwinkel und somit auch gleiche Bogen, und umgekehrt:

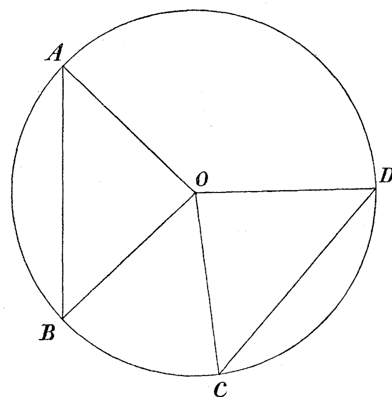


Fig. 73.

Zu gleichen Centriwinkeln oder Bogen gehören gleiche Sehnen.

Beweis. Man zeichne zwei gleiche Sehnen AB und CD (Fig. 73), verbinde den Kreismittelpunkt O mit ihren Endpunkten und drehe OAB um O. Dann fällt OB mit OD zusammen, wenn OA die Strecke OC deckt.

Auch den zweiten Teil des Satzes beweist man ebenso durch Drehung.

29. Lehrsatz. Verbindet man den Mittelpunkt eines Kreises mit dem Mittelpunkte einer Sehne, so steht die Verbindungslinie auf der Sehne senkrecht.

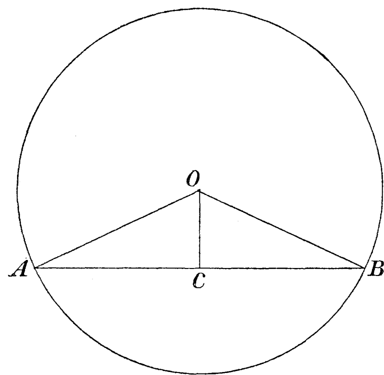


Fig. 74.

Anleitung. Stellt man eine Figur her nach den Angaben des Lehrsatzes und beachtet, dafs demgemäfs $AO = OB$, $AC = CB$ ist, so ergeben sich kongruente Dreiecke (Fig. 74). Aus der Kongruenz folgt, dafs die Verbindungslinie zur Sehne senkrecht ist.

30. Lehrsatz. Fällt man vom Mittelpunkt eines Kreises eine Senkrechte auf eine Sehne, so trifft sie den Mittelpunkt derselben.

Anleitung. Verbindet man die Endpunkte der Sehne mit dem Kreismittelpunkte, so ergeben sich kongruente Dreiecke (4. Krit.).

31. Lehrsatz. Die auf einer Sehne errichtete Mittelsenkrechte geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Beweis. Angenommen die Mittelsenkrechte gehe nicht durch den Kreismittelpunkt O hindurch. Verbinde ich den Mittelpunkt

C der Sehne mit O, so ist nach Lehrsatz 29 CO senkrecht zur Sehne AB. Somit ständen zwei Linien zu AB in C senkrecht, was unmöglich ist. Das Gegenteil der Behauptung kann also nicht stattfinden; folglich ist der Lehrsatz richtig.

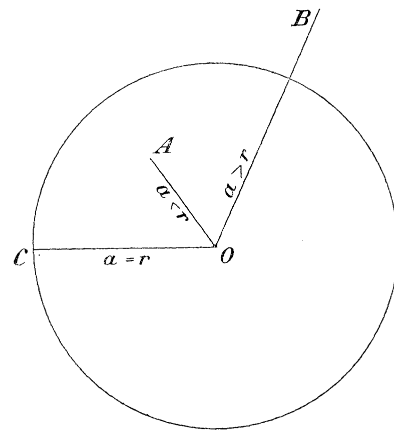


Fig. 75.

Anmerkung. Die beigesetzte Figur 75 liefert durch Anschauung folgendes Ergebnis: Die Punkte der Ebene zerfallen durch eine Kreislinie in drei Klassen. Nennt man die Entfernung eines Punktes vom Kreismittelpunkte a und den Radius r, so ist für die erste Klasse $a < r$. Der Punkt liegt innerhalb des Kreises. Für die zweite Klasse ist $a > r$. Der Punkt liegt aufserhalb des Kreises. Die dritte Klasse $a = r$ trennt die beiden vorigen. Der Punkt liegt auf dem Kreise.

32. Lehrsatz. Steht eine Linie auf einem Radius in dessen Endpunkte senkrecht, so hat sie mit dem Kreise nur einen Punkt gemeinsam, alle ihre übrigen Punkte liegen aufserhalb des Kreises.

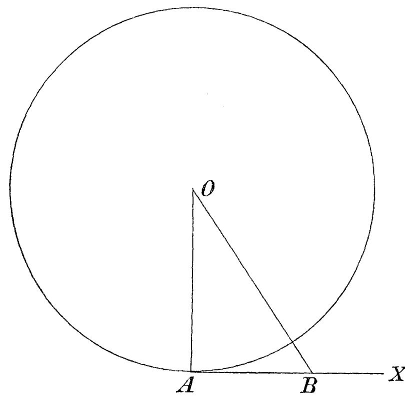


Fig. 76.

Herstellung der Figur. Ich ziehe einen Radius OA (Fig. 76) und errichte auf OA die Senkrechte AX. Es ist also

Voraussetzung: $OA \perp AX$.

Behauptung. Alle Punkte der Linie AX, mit Ausnahme von A, liegen aufserhalb des Kreises.

Beweis. Verbindet man einen beliebigen Punkt der Linie AX, etwa B, mit O, so ist $OB > OA$ (Lehrsatz 11). OB ist also gröfser als der Radius, somit liegt B aufserhalb des Kreises.

Erklärung. Eine Gerade, welche mit dem Kreise nur einen Punkt gemeinsam hat, heifst Tangente.

Lehrsatz 32 ist umkehrbar. Man vergleiche dazu die Gruppe der Sätze 29, 30 und 31.

94. Aufgabe. An einen Kreis im Punkte P eine Tangente zu ziehen.

Lösung. Ich verbinde P mit dem Mittelpunkte des Kreises O und ziehe $PX \perp OP$, so ist PX Tangente. Der Beweis folgt unmittelbar aus Lehrsatz 32.

95. Aufgabe. Ein Kreisbogen ist gegeben, man finde den Kreismittelpunkt.

Lösung. Man ziehe zwei beliebige Sehnen innerhalb des gegebenen Kreisstückes und errichte zu jeder Sehne die zugehörige Mittelsenkrechte. Der Schnittpunkt dieser Senkrechten ist nach Lehrsatz 31 der gesuchte Kreismittelpunkt.

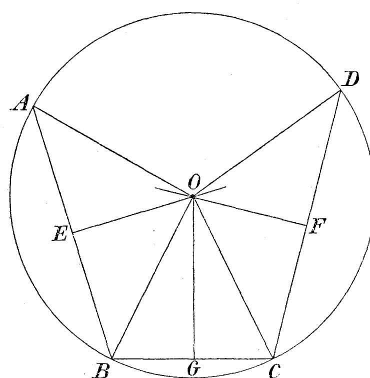


Fig. 77.

Besprechung dieser Lösung. Man kann die willkürlichen Sehnen stets so einrichten, dafs sie nicht parallel werden. Zur Übung kann man den Satz beweisen, dafs die Verbindungslinie der Mittelpunkte paralleler Sehnen zu den Sehnen senkrecht steht.

Ferner erinnern wir an die Erklärung, welche wir § 14 vom geometrischen Ort gegeben haben.

Ein geometrischer Ort hat folgende Erklärung:

Jeder Punkt des Ortes hat eine gewisse geometrische Eigentümlichkeit.

Kein sonstiger Punkt hat dieselbe Eigentümlichkeit.

Ist daher eine Aufgabe durch geometrische Örter in diesem Sinne gelöst, so bedarf die Richtigkeit der Lösung keines besondern Beweises. Auch die Einschränkung (Angabe der Möglichkeitsbedingungen) vereinfacht sich dann ungemein. Haben zwei geometrische Örter nur einen gemeinsamen Punkt, so ist die erhaltene Lösung die einzig mögliche.

Wenden wir diese Bemerkungen auf die vorige Aufgabe an, so ergiebt sich folgender Wortlaut der

Lösung. Da der Kreismittelpunkt von den Punkten der Peripherie gleiche Entfernung hat, so wird er bestimmt durch folgende Örter:

Erster geometrischer Ort ist die auf der beliebigen Sehne AB errichtete Mittelsenkrechte.

Zweiter geometrischer Ort ist die auf der beliebigen Sehne CD errichtete Mittelsenkrechte.

7. Übungslehrsatz. Die Abstände des Kreismittelpunktes von zwei gleichen Sehnen sind einander gleich.

Anleitung. Nach Lehrsatz 30 liegen kongruente Dreiecke vor. Einen zweiten Beweis erhält man, wenn man, wie bei Lehrsatz 28, die eine Sehne so dreht, daſs ihre Endpunkte mit den Endpunkten der andern zusammenfallen.

8. Übungslehrsatz. Von zwei Sehnen ist diejenige die kleinere, von welcher der Kreismittelpunkt den gröſsern Abstand hat.

Anleitung. Verbindet man den Kreismittelpunkt mit je einem Endpunkte und dem Mittelpunkte der Sehne, so erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke, welche in der Hypotenuse übereinstimmen. Dann wende man Lehrsatz 27 an.

96. Aufgabe. Man beweise die Umkehrungen der beiden vorhergehenden Übungslehrsätze.

97. Aufgabe. An einen Kreis eine Tangente zu ziehen, welche zu einer gegebenen Geraden parallel ist.

Anleitung. Man fälle vom Mittelpunkte des Kreises auf die gegebene Gerade eine Senkrechte.

98. Aufgabe. Eine Tangente an einen Kreis zu ziehen, welche mit einer gegebenen Geraden einen vorgeschriebenen Winkel bildet.

99. Aufgabe. Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch einen gegebenen Punkt A geht und eine gegebene Gerade im Punkte B berührt.

Anleitung. Zieht man AB, so muſs AB Sehne werden. So ergiebt sich für den Mittelpunkt des gesuchten Kreises ein erster geometrischer Ort. Ein zweiter folgt aus Lehrsatz 32.

100. Aufgabe. Einen Kreis zu beschreiben, der durch drei gegebene Punkte geht.

Anleitung. Man ziehe AB und AC. Dieselben müssen Sehnen werden. Lehrsatz 31 oder geometrischer Ort 2, S. 27.

33. Lehrsatz. Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, und dieser Punkt hat von den Ecken gleiche Entfernung.

Anleitung. Man zeichne zuerst zwei Mittelsenkrechte und beweise durch kongruente Dreiecke, dafs ihr Schnittpunkt von den Ecken gleiche Entfernung hat. Sodann verbinde man den Schnittpunkt mit dem Mittelpunkte der dritten Seite und zeige durch kongruente Dreiecke, dafs diese Verbindungslinie auf der dritten Seite senkrecht steht.

Dieser Satz läfst sich auch so ausdrücken:

Um jedes Dreieck läfst sich ein Kreis beschreiben. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten (erster merkwürdiger Punkt im Dreieck).

101. Aufgabe. Eine gerade Linie schneidet einen Kreisbogen einmal. Man finde den zweiten Schnittpunkt, ohne den Kreis auszuziehen.

Anleitung. Der Schnittpunkt der geraden Linie mit dem Kreise sei A. Vom Kreismittelpunkte O fälle man auf die Gerade die Senkrechte OC. Dann verlängere man AC um sich selbst bis zum Punkte B. B ist dann der zweite Schnittpunkt. Eine Gerade **schneidet** somit einen Kreis niemals nur in einem Punkte, sondern stets in zwei Punkten.

102. Aufgabe. Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Gerade berührt, und zwar die eine in einem gegebenen Punkte.

Anleitung. Man halbiere den Winkel der Geraden und wende Lehrsatz 32 an. Der Beweis folgt aus kongruenten Dreiecken.

103. Aufgabe. Einen Kreis mit gegebenem Radius r zu beschreiben, der zwei gegebene Gerade berührt.

Anleitung. Man ziehe zu den Geraden im Abstande r Parallele, oder man ziehe nur eine Parallele und halbiere den von den Geraden gebildeten Winkel. (Aufgabe 26 oder geometrischer Ort 3, S. 29.)

104. Aufgabe. Einen Kreis zu beschreiben, der die drei Seiten eines Dreiecks berührt.

Anleitung. Man halbiere zwei Dreieckswinkel. Die vom Schnittpunkte auf die Seiten gefällten Senkrechten sind einander gleich. (Aufgabe 26 oder geometrischer Ort 3, S. 29.)

34. Lehrsatz. Die drei Winkelhalbierer eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, und dieser Punkt hat von den Seiten gleichen Abstand.

Anleitung. Man ziehe zuerst zwei Winkelhalbierer und zeige, dafs ihr Schnittpunkt von den Seiten gleichen Abstand hat. Darauf verbinde man diesen Schnittpunkt mit der dritten Ecke und beweise durch kongruente Dreiecke, dafs die Verbindungslinie den dritten Winkel halbiert.

Dieser Satz läfst sich auch so ausdrücken:

In jedes Dreieck läfst sich ein Kreis einbeschreiben. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierer (zweiter merkwürdiger Punkt).

105. Aufgabe. Einen Kreis mit gegebenem Radius zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade berührt und eine andere unter gegebener Sehne schneidet.

Anleitung. Man trage in dem irgendwo mit r beschriebenen Kreise eine Sehne ab, welche die vorgeschriebene Gröfse hat. Dann ziehe man zu der gegebenen zweiten Geraden eine Parallele in dem Abstande, der gleich der Senkrechten ist, die man vom Kreismittelpunkte auf die eingetragene Sehne fällen kann.

106. Aufgabe. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der zwei Gerade unter gegebenen Sehnen schneidet.

107. Aufgabe (Zeichnungsaufgabe). Es ist gegeben ein spitzwinkliges, ein rechtwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck. Man bestimme durch Zeichnung für jedes den Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises (vgl. Aufgabe 91 S. 47).

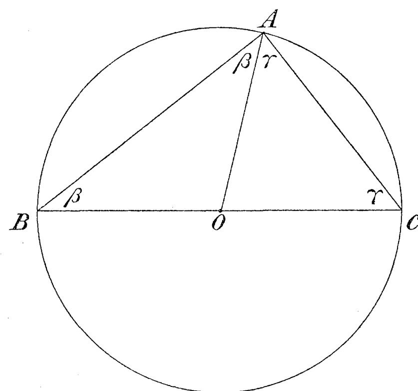


Fig. 78.

35. Lehrsatz. Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist gleich 90^0 (Lehrsatz des Thales).

Anleitung. Der Beweis wird geführt durch die Methode der Winkelberechnung (Fig. 78).

108. Aufgabe. Von einem Punkte an einen Kreis eine Tangente zu ziehen.

Lösung. Den Punkt P verbinde ich mit dem Mittelpunkt O und beschreibe über OP als Durchmesser einen Kreis, welcher den gegebenen in A und B schneiden möge. PA und PB sind die verlangten Tangenten.

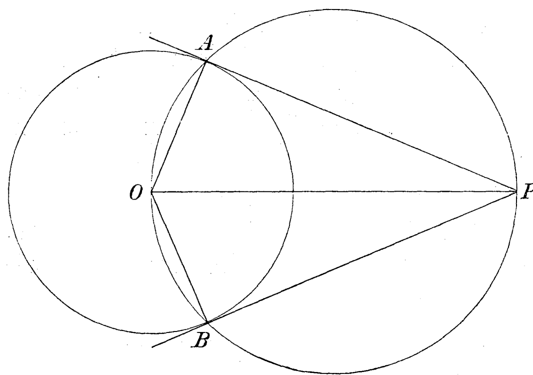


Fig. 79.

Beweis. Verbindet man O (Fig. 79) mit A und B, so sind nach dem Lehrsatze des Thales OAP und OBP gleich 90^0, PA und PB stehen somit auf den Radien OA und OB senkrecht und berühren daher den Kreis.

Einschränkung. Die Lösung ist unmöglich, wenn P innerhalb des Kreises liegt. Ist P ein Punkt der Peripherie, so erhält man eine Tangente. Liegt P aufserhalb des Kreises, so erhält man zwei Tangenten. Über dieselben gilt wegen der Kongruenz der Dreiecke PAO und PBO folgender Satz:

36. Lehrsatz. Die von einem Punkte an den Kreis gezogenen Tangenten sind einander gleich.

Centrale ist die Verbindungslinie eines Punktes mit dem Kreismittelpunkt oder auch die Verbindungslinie zweier Kreismittelpunkte.

9. Übungslehrsatz. Die Centrale halbiert den Winkel der Tangenten.

5. Der geometrische Ort für die Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte gehen, ist der über der Verbindungslinie der beiden Punkte als Durchmesser beschriebene Kreis.

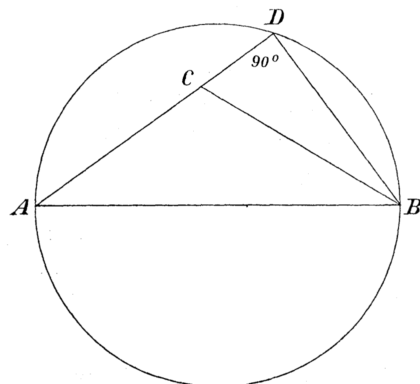


Fig. 80.

Beweis. Es ist zu zeigen, dafs jedesmal ein rechter Winkel entsteht, wenn man einen Punkt des Kreises mit den festen Punkten A und B (Fig. 80) verbindet, und dafs die Verbindungslinien irgend eines Punktes innerhalb oder aufserhalb des Kreises mit den Punkten A und B keinen rechten Winkel bilden.

Verbindet man nun einen Punkt P des Kreises mit A und B, so ist $\sphericalangle APB = 90^0$ nach dem Lehrsatze des Thales.

Verbindet man ferner einen Punkt C innnerhalb des Kreises mit A und B und verlängert AC bis zum Schnittpunkte mit dem Kreise D, so ist, wenn noch DB gezogen wird, $\sphericalangle ADB = 90^0$ und somit $\sphericalangle ACB > 90^0$ (Satz vom Aufsenwinkel). In gleicher Weise ergiebt sich $\sphericalangle ACB < 90^0$, wenn C aufserhalb des Kreises liegt.

109. Aufgabe. Man zeichne mit Hülfe des vorigen Ortes ein rechtwinkliges Dreieck, von dem die Hypotenuse und eine Kathete gegeben sind.

110. Aufgabe. Man trage in einen Kreis die Sehne a ein und beschreibe mit dem Abstande des Kreismittelpunktes von dieser Sehne einen koncentrischen Kreis. Es ist zu zeigen, dafs sämtliche Sehnen, welche den koncentrischen Kreis berühren, gleich a sind (vgl. Übungslehrsatz 7, S. 51).

111. Aufgabe. Durch einen Punkt ziehe man eine Sekante, so dafs die abgeschnittene Sehne eine vorgeschriebene Länge hat.

Anmerkung. Durch einen Kreis zerfallen die Geraden einer Ebene in drei Klassen, je nachdem der Abstand des Kreismittelpunktes von ihnen gleich r, $> r$, $< r$ ist. Dies lehrt die Anschauung, es kann aber auch bei der Wiederholung bewiesen werden.

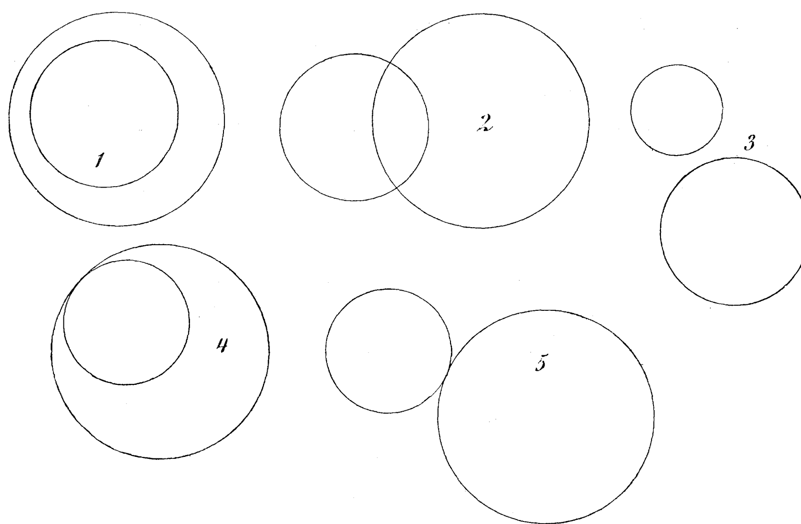


Fig. 81.

Zwei Kreise können zu einander drei Hauptlagen und zwei Grenzlagen haben. In Fig. 81 sind dieselben der Reihe nach dar-

gestellt. Bedeutet c die Centrale und sind r und ρ die Radien, so ist für die Lage

1 $c < r - \rho$, für 2 ist $c < r + \rho$ und $c > r - \rho$, für 3 ist $c > r + \rho$.

112. Aufgabe. Mit ρ als Radius einen Kreis zu beschreiben, der einen andern Kreis, dessen Radius r ist, in C berührt.

Lösung. Ich verbinde den Kreismittelpunkt A mit dem gegebenen Punkte C und verlängere AC über C hinaus um ρ. Den Endpunkt nenne ich B. Der um B mit ρ beschriebene Kreis löst die Aufgabe.

Einen zweiten Kreis erhält man, wenn man von C aus auf CA ρ abträgt. Der Endpunkt sei B genannt. Der um B mit ρ beschriebene Kreis genügt ebenfalls der Aufgabe.

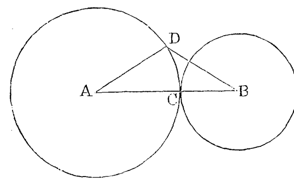


Fig. 82.

Beweis. Der um B mit ρ (Fig. 82) beschriebene Kreis hat den Punkt C mit dem gegebenen Kreise gemeinsam. Es soll nun gezeigt werden, dafs die beiden Kreise keinen weitern Punkt gemeinsam haben können.

Angenommen die Kreise hätten noch den Punkt D gemeinsam. Dann müfste sein: $AD + DB = r + \rho$. Dies ist nicht möglich, da $AD + DB > AB$ und somit $> r + \rho$ ist.

Ganz ähnlich ergiebt sich der Beweis für die zweite Lösung.

Aus dieser Aufgabe gewinnen wir das Ergebnis: für den Grenzfall 4 ist $c = r - \rho$, für 5 aber $c = r + \rho$. Die Centrale geht durch den Berührungspunkt.

113. Aufgabe. Man zeige an der Fig. 32, dafs $AD \perp BC$ ist.

Anleitung. Von den vier Teildreiecken sind je zwei kongruent.

10. Übungslehrsatz. Die gemeinsame Sehne zweier Kreise steht senkrecht zur Centrale (vgl. Aufgabe 113).

114. Aufgabe. An zwei Kreise eine gemeinsame Tangente zu ziehen.

Vorbereitung. Angenommen die Aufgabe sei gelöst. Ziehe ich dann die Centrale und die Radien zu den Berührungspunkten der Tangente, so ist, wenn durch den Mittelpunkt des kleinern Kreises zur Tangente eine Parallele gezogen wird, ein rechtwinkliges Dreieck vorhanden, das gezeichnet werden kann. In demselben ist nämlich die Hypotenuse die gegebene Centrale, und eine Kathete gleich der Differenz der Radien. Ferner erkennt man,

dafs nach vollzogener Zeichnung des Dreiecks ein Rechteck bekannt ist. Dasselbe liefert die Berührungspunkte. (Der Lernende unterlasse nicht, die Figur zu entwerfen.)

Lösung. Über der Centrale OR (Fig. 83) als Durchmesser beschreibe ich einen Kreis und dann mit der Differenz der Radien um den Mittelpunkt des gröfsern Kreises einen Kreis, welcher den ersten in den Punkten A und B schneiden möge. Alsdann verbinde ich O mit A und B, verlängere die Linien OA und OB, bis sie den Kreis um O in den Punkten C und D schneiden, und ziehe durch R zu OC und OD in derselben Richtung die parallelen Radien RE und RF. Dann sind CE und DF gemeinschaftliche Tangenten.

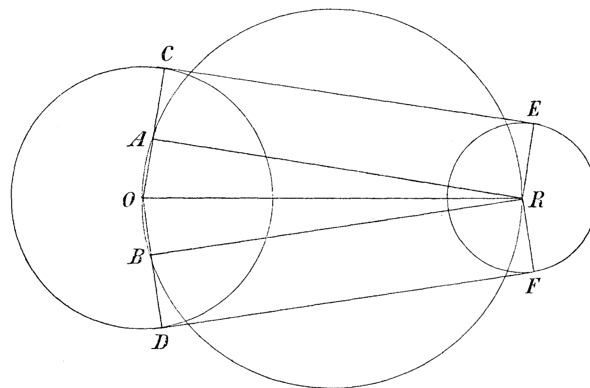


Fig. 83.

Beweis. Es ist zu zeigen, dafs OC und RE auf CE und dafs OD und RF auf DF senkrecht stehen. Dies geschieht dadurch, dafs man mit Hülfe von Lehrsatz 24 und Übungslehrsatz 1, S. 39, zeigt, dafs $ACER$ und $BDFR$ Rechtecke sind.

Besprechung dieser Lösung. Liegen die Kreise ganz auseinander, so erhält man aufser den eben gefundenen Tangenten, die äufsere gemeinschaftliche Tangenten genannt werden, noch zwei weitere, die innere gemeinschaftliche Tangenten heifsen. Die Zeichnung der innern Tangenten geschieht in ähnlicher Weise, wie die äufsern gezeichnet wurden. Es kommt dabei statt der Differenz der beiden Radien die Summe zur Verwendung. Der Beweis ist dem gegebenen ähnlich.

Einschränkung. Berühren sich die Kreise von aufsen, so erhält man zwei äufsere und eine innere Tangente.

Nur äufsere Tangenten werden erhalten, wenn die Kreise sich schneiden.

Berühren sich die Kreise von innen, so erhält man eine Tangente und schliefslich gar keine, wenn der eine Kreis ganz innerhalb des andern liegt.

115. Aufgabe. Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt.

Anleitung. Man verbinde den Kreismittelpunkt mit dem gegebenen Punkte der Peripherie und letztern mit dem weiterhin gegebenen Punkte. Darauf beachte man Aufgabe 112 und den geometrischen Ort 2, S. 27.

116. Aufgabe. Einen Kreis zu beschreiben, der drei gleiche Kreise berührt.

117. Aufgabe. Durch einen Punkt innerhalb eines Kreises eine Sehne von vorgeschriebener Länge zu ziehen.

Lösung. Man zeichne in dem Kreise eine Sehne von vorgeschriebener Gröfse und beschreibe einen koncentrischen Kreis, dessen Radius gleich dem Abstande des Kreismittelpunktes von der Sehne ist. Die von dem gegebenen Punkte an den koncentrischen Kreis gelegte Tangente löst die Aufgabe.

118. Aufgabe. Einen Kreis zu zeichnen, der durch einen Punkt geht und zwei gegebene parallele Gerade berührt.

119. Aufgabe. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei Radien und den zugehörigen Kreisbogen berührt.

Anleitung. Im Mittelpunkte des Bogens ziehe man eine Tangente an den Bogen.

120. Aufgabe. In welches und um welches Parallelogramm läfst sich ein Kreis beschreiben?

Anleitung. Die Höhen bezüglich die Diagonalen müssen einander gleich sein.

121. Aufgabe. Man bestimme innerhalb eines Winkels BAC diejenigen Punkte, für welche die Summen oder Differenzen der Abstände von den Schenkeln eine vorgeschriebene Gröfse a haben.

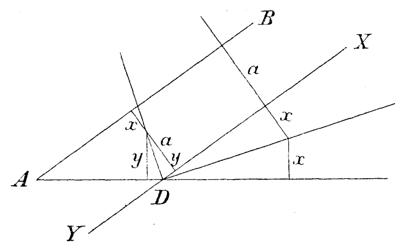


Fig. 84.

Anleitung. Zu einem der Schenkel, etwa zu BA (Fig. 84), ziehe man im Abstande a eine Parallele XY, welche AC in D schneiden möge. Darauf halbiere man die Winkel ADX und XDC. Die Punkte dieser Winkelhalbierer genügen der ersten bezüglich der zweiten Forderung, wie sich mit Hülfe der Sätze vom Winkelhalbierer und von dem Abstande paralleler Linien zeigen läfst.

122. Aufgabe. Welche Eigenschaft besitzen die Punkte der vorhin erwähnten Winkelhalbierer, die aufserhalb des Winkelraumes BAC liegen?

123. Aufgabe. Ein Parallelogramm zu zeichnen, wenn β, $h_a + h_b$ und eine der Diagonalen gegeben ist.

Anleitung. Vom Schnittpunkte der Diagonalen fälle man die Senkrechten auf die Seiten, welche den Winkel β bilden, und zeige, dafs ihre Summe gleich $\frac{1}{2}(h_a + h_b)$ ist. Dann wende man Aufgabe 121 an.

124. Aufgabe. Ein Parallelogramm zu zeichnen aus β, $a \pm b$ und einer Diagonale.

125. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus a, α, $h_c + h_b = s$.

Vorbereitung. In nebenstehender Fig. 85 ist $BD = h_b$ um $DF = h_c$ verlängert und durch F zu AC eine Parallele gezogen, welche die Verlängerung von BA in G schneidet. Zieht man noch $AH \parallel DF$, so ist $\triangle\ GAH \cong ACE$ (2. Krit.) und darum $AG = AC$, $\sphericalangle\ AGC = ACG = \frac{\alpha}{2}$.

Fig. 85.

Lösung. Man zeichne Dreieck BFG, halbiere den Winkel BGF und beschreibe um B mit a einen Kreis. Dadurch erhält man C. A wird gefunden, indem man auf GC die Mittelsenkrechte errichtet. (Siehe Schwering, 100 Aufgaben, S. 93.)

126. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus $a + b + c = s$, α, β.

Anleitung. Man stelle in geeigneter Weise $a + b + c$ her und beachte, dafs in einem Dreieck alle Winkel bekannt sind, wenn man zwei kennt.

127. Aufgabe. Durch einen Punkt zweier Kreise eine Gerade so zu ziehen, dafs die beiden Sehnen gleich werden.

Anleitung. Sind A und B die Mittelpunkte, so verbinde man einen von ihnen, etwa A, mit dem Schnittpunkte C der Kreise und verlängere AC um sich selbst bis D. Die von C auf DB gefällte Senkrechte leistet das Verlangte.

Aufgaben. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben ist: ***128.*** m_a, α, β; ***129.*** h_a, α, β; ***130.*** ρ, α, β; ***131.*** r, α, β (m_a ist

Halbierungslinie des Winkels α. Fortan ist stets r der Radius des umbeschriebenen, ρ der Radius des einbeschriebenen Kreises).

132. Aufgabe. Verbindet man einen Punkt O im Innern einer Dreiecksfläche mit den Eckpunkten der Grundlinie, so ist die Summe dieser Entfernungen kleiner als die Summe der beiden andern Seiten.

Anleitung. Man verlängere BO bis zum Schnittpunkte D mit der Seite AC. Auf die Dreiecke BDA und COD wende man den Satz von der Summe zweier Dreiecksseiten an.

133. Aufgabe. Ein Kreis und ein Punkt ist gegeben. Man bestimme diejenigen Punkte des Kreises, welche von dem gegebenen Punkte die kleinste und die gröſste Entfernung haben.

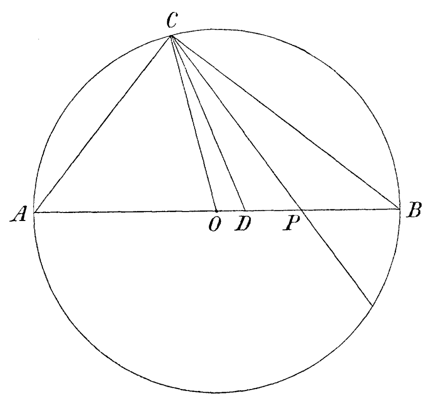


Fig. 86.

Lösung. Von dem Punkte P (Fig. 86) ziehe ich den Durchmesser AB. Dann ist PB die kleinste Entfernung des Punktes P von irgend einem Punkte der Peripherie und PA die gröſste.

Beweis. Zieht man durch P eine beliebige Linie PC und verbindet C mit A und O, so ist $\measuredangle\, CAO = ACO$ und darum $\measuredangle\, ACP > CAO$. Es ist also $PA > PC$.

Verbindet man ferner C mit B, so ergiebt sich $\measuredangle\, PCB < PBC$ und somit $PB < PC$.

Liegt P auſserhalb des Kreises, so gilt derselbe Beweis.

Anmerkung. Diese Aufgabe führt uns auf den folgenden sogenannten Nichtkongruenzsatz.

11. Übungssatz. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten, nicht aber in dem von ihnen gebildeten Winkel überein, so liegt dem gröſsern Winkel die gröſsere Seite gegenüber und umgekehrt.

Anleitung. Man betrachte Fig. 87 Dreieck FEA und zeige, daſs $FH < FE < FD < FJ$. Dann wähle man zwischen E und D einen Punkt X auf dem Bogen ED und zeige mit Hülfe von Lehrsatz 11, daſs $FE < FX < FD$. Die Umkehrung beweist man indirekt.

134. Aufgabe. Um ein gegebenes Quadrat ein anderes gegebenes zu beschreiben („100 Aufgaben“ S. 55).

135. Aufgabe. Gegeben sind zwei Kreise um A und B und auf dem letztern ein Punkt C; es soll ein Kreis gezeichnet werden, der A und B berührt, und zwar den letztern in C.

Lösung. Man ziehe BC und dazu den parallelen Radius AE. Ferner verbinde man E mit C und nenne D den Schnittpunkt von EC mit dem Kreise um A. Die Verlängerungen von AD und BC schneiden sich im Mittelpunkte des verlangten Kreises G.

Beweis (Methode der Winkelberechnung). Es ist zu zeigen, dafs der um G mit GC (Fig. 87) beschriebene Kreis die Kreise um A und B berührt. Er berührt zunächst den Kreis um B, da die Centrale BG gleich der Summe der Radien ist. Aus demselben Grunde wird er auch den Kreis um A berühren, wenn

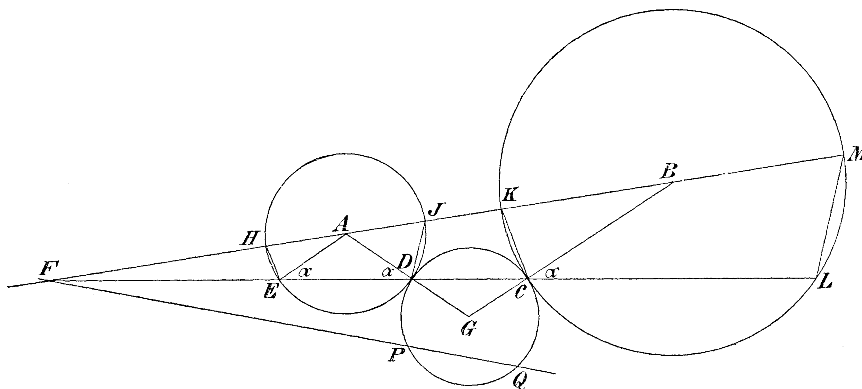


Fig. 87.

$DG = GC$ ist. Letzteres ist der Fall. Denn nennt man α den Winkel AED, so ist auch $\sphericalangle DCG = \alpha$ als Wechselwinkel bei parallelen Linien. Da ferner $\triangle EAD$ ein gleichschenkliges Dreieck ist, so ist auch $\sphericalangle EDA$ gleich α. Auch DGC ist somit ein gleichschenkliges Dreieck und daher $DG = CG$.

136. Aufgabe. Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Kreise oder einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt.

Anleitung. Man findet den Kreismittelpunkt als Schnittpunkt zweier Kreise oder als Schnittpunkt eines Kreises und einer Geraden.

137. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus a, h_a, t_b.

Anleitung. Man ergänze ABC zum Parallelogramm $ABCD$, worin $BD = 2\,t_b$ ist, oder man fälle vom Fuſspunkte der Mittellinie t_b eine Senkrechte auf a. Dieselbe ist gleich $\frac{1}{2}\,h_a$.

138. Aufgabe. Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, die durch einen Punkt P innerhalb eines Kreises gezogen sind?

Anleitung. Die vom Kreismittelpunkte auf die Sehnen gefällten Senkrechten halbieren dieselben.

139. Aufgabe. Man bestimme denselben geometrischen Ort, wenn P auſserhalb des Kreises liegt. Entsteht dabei eine uneigentliche Lösung?

140. Aufgabe. Gegeben sind zwei Punkte A und B auf derselben Seite einer Geraden. Man bestimme auf der Geraden einen Punkt X, so daſs $AX + BX$ ein Minimum wird.

Anleitung. Vgl. „100 Aufgaben" S. 23.

141. Aufgabe. Man zeichne in ein gleichseitiges Dreieck drei Kreise, von denen jeder die beiden andern und zwei Seiten des Dreiecks berührt. (Verallgemeinert heiſst diese Aufgabe die Malfattische.)

Anleitung. Man fälle die drei Höhen und halbiere die rechten Winkel am Fuſspunkte der einzelnen Höhen.

Lehraufgabe der Obertertia.

Vorbemerkung.

Zunächst sind sämtliche Sätze und Aufgaben, auch die im ersten und zweiten Lehrgange überschlagenen Aufgaben zu wiederholen.

Die Lehre vom Kreise.

II. Teil.

§ 20. Vom Peripherie- und Centriwinkel.

Zu einem Bogen gehören so viele Peripheriewinkel, als es Punkte auf der Peripherie giebt, die dem Bogen nicht angehören. Man sagt von diesen Peripheriewinkeln, sie stehen über demselben Bogen oder auf derselben Sehne.

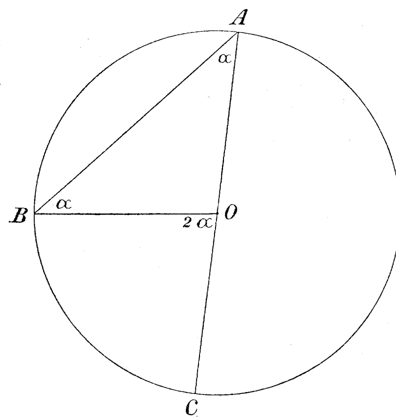


Fig. 88.

37. Lehrsatz. Ein Peripheriewinkel ist gleich der Hälfte des zugehörigen Centriwinkels.

Beweis. 1. Der Kreismittelpunkt liegt auf einem Schenkel des Peripheriewinkels.

Nennt man den Peripheriewinkel BAC α (Fig. 88), so ist auch, da BOA gleichschenklig ist, ABO gleich α. Nach dem Satze über den Aufsenwinkel am Dreieck ist dann der Centriwinkel $BOC = 2\alpha$. Er ist also doppelt so grofs wie der Peripheriewinkel.

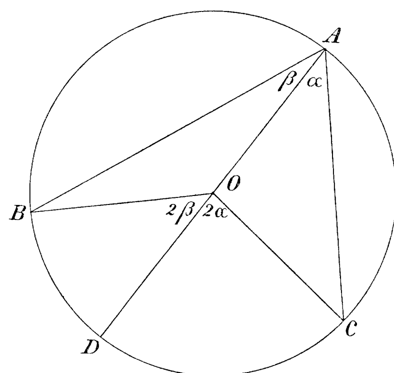


Fig. 89.

2. Der Kreismittelpunkt liegt innerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels.

Zieht man den Durchmesser AD (Fig. 89) und bezeichnet Winkel DAC mit α und DAB mit β, so ergiebt die vorhin angewandte Winkelrechnung, dafs der Centriwinkel $BOC = 2(\alpha + \beta)$, d. h. doppelt so grofs ist als der Peripheriewinkel.

3. Der Kreismittelpunkt liegt aufserhalb der Schenkel des Peripheriewinkels.

Bei dieser Lage erhält man durch Winkelberechnung für die Gröfse des Centriwinkels $2(\beta - \alpha)$ (Fig. 90), wenn Winkel DAC mit α und Winkel DAB mit β bezeichnet wird. Der Peripheriewinkel ist dann gleich $\beta - \alpha$, also die Hälfte des Centriwinkels.

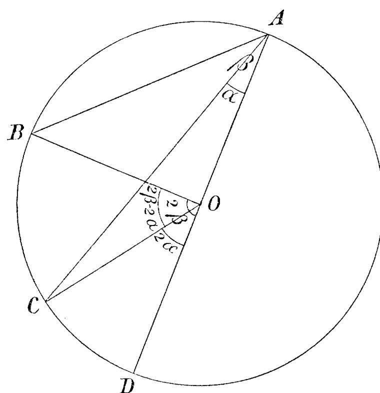


Fig. 90.

38. Lehrsatz. Peripheriewinkel über demselben Bogen sind einander gleich.

Beweis. Die bezeichneten Peripheriewinkel sind einander gleich, da jeder von ihnen gleich der Hälfte des zugehörigen Centriwinkels ist.

Anmerkung. Man führe den Beweis zu Lehrsatz 37, wenn der Peripheriewinkel gröfser als 90^{0} ist.

39. Lehrsatz. Der von einer Sehne und einer Tangente gebildete Winkel ist gleich dem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitte.

Voraussetzung. $AX \perp AO$.

Behauptung. $\sphericalangle XAB$ ist so grofs wie der Peripheriewinkel über der Sehne AB.

Beweis. Der Beweis ergiebt sich aus den Winkelbezeichnungen der Fig. 91, S. 65.

142. Aufgabe. Über AB als Sehne einen Kreis zu beschreiben, der den Winkel α fafst, d. h. einen Kreis zu beschreiben, der

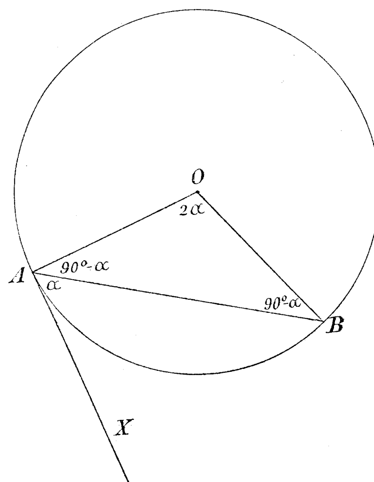


Fig. 91.

durch die Punkte A und B geht und so beschaffen ist, daſs die Peripheriewinkel über dem Bogen AB gleich α sind ($\alpha < 90^0$).

Lösung. Auf AB (Fig. 92) errichte man die Mittelsenkrechte und lege an AB in A den Winkel $90^0 - \alpha$ an. Der freie Schenkel des Winkels treffe die Mittelsenkrechte in O. Der um O mit OA beschriebene Kreis leistet das Verlangte.

Beweis. Es ist zu zeigen, daſs der Kreis durch B geht und daſs der Bogen über AB den Winkel α faſst.

Ersteres folgt aus der Kongruenz der Dreiecke AOD und BOD, letzteres durch die Methode der Winkelberechnung aus den Bezeichnungen der Figur.

143. Aufgabe. Man wiederhole mit Beweis die sämtlichen bisher genannten geometrischen Örter.

144. Aufgabe. Es ist Aufgabe 142 zu lösen, wenn $\alpha > 90^0$ ist.

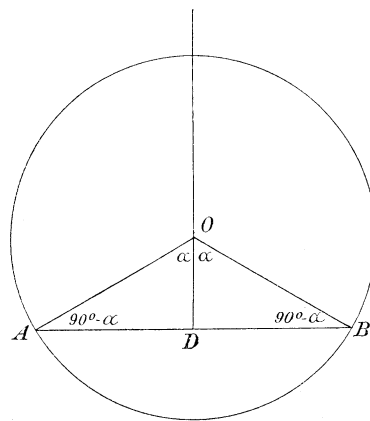


Fig. 92.

6. Der geometrische Ort für die Scheitelpunkte aller Winkel α, deren Schenkel durch die Punkte A und B gehen, ist der über der Strecke AB beschriebene Kreisbogen, der den Winkel α faſst.

Beweis. Nach Lehrsatz 38 hat jeder Punkt des Bogens die genannte Eigenschaft. Kein Punkt auſserhalb des Bogens hat die genannte Eigenschaft. Denn verbindet man zunächst einen Punkt C innerhalb des Kreisbogens mit A und B (Fig. 93), so ist, wenn AC bis zum Schnittpunkte mit dem Kreise verlängert und dieser Punkt D noch mit B verbunden wird:

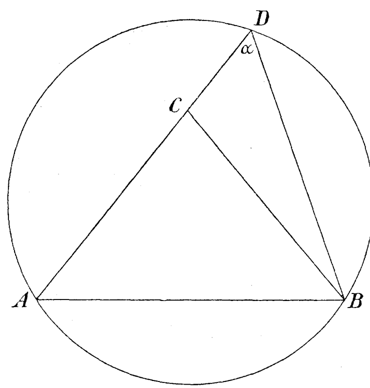


Fig. 93.

$\sphericalangle\, ACB = CDB + CBD.$

Es ist also $\sphericalangle\, ACB > CDB$ und darum gröſser als α.

Der Lernende zeige, daſs Winkel $ACB < \alpha$ ist, wenn AC den Bogen über AB schneidet.

145. Aufgabe. Mit vorstehendem geometrischen Ort soll ein Dreieck gezeichnet werden, von dem gegeben ist a, α und eine passende Strecke, z. B. h_a, t_a, $b + c$, $b - c$.

§ 21. Vom Kreisviereck.

Da drei Punkte einen Kreis vollständig bestimmen, so wird der durch drei von vier Punkten, etwa A, B, C, gelegte Kreis im allgemeinen durch den vierten Punkt D nicht gehen. Derselbe muſs vielmehr eine bestimmte Lage haben, die wir mit Hülfe der beiden nachfolgenden Sätze bestimmen wollen.

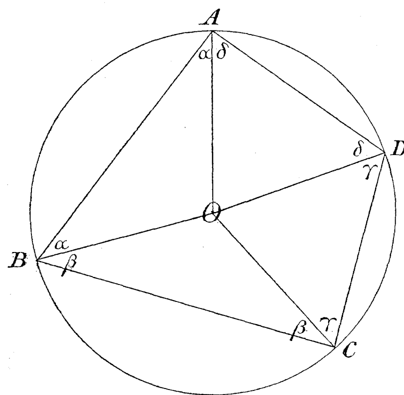


Fig. 94.

40. Lehrsatz. Die Summe der gegenüberliegenden Winkel eines einem Kreise einbeschriebenen Vierecks (Kreisvierecks) ist gleich 180°.

Beweis. Nach Lehrsatz 8 S. 19 erkennt man die Richtigkeit der in nebenstehender Fig. 94 gebrauchten Winkelbezeichnung. Nun ist nach Lehrsatz 18 S. 35

$$2\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 360^0$$

oder $\sphericalangle\, B + D = 180^0$.

Ebenso ergiebt sich $\sphericalangle\, A + C = 180^0$.

Anmerkung. Der Beweis ist zu führen, wenn O auſserhalb des Vierecks $ABCD$ liegt.

41. Lehrsatz. Ein Viereck ist ein Kreisviereck, d. h. es läſst sich um dasselbe ein Kreis beschreiben, wenn die Summe der gegenüberliegenden Winkel gleich 180° ist.

Beweis. Die vier Punkte A, B, C, D (Fig. 95) liegen so, dafs $\sphericalangle A + C = 180^0$ und $\sphericalangle B + D = 180^0$ ist.

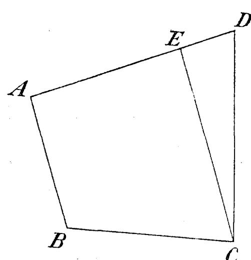


Fig. 95.

Durch drei von den Punkten, etwa $A, B, C,$ ist ein Kreis möglich. Angenommen nun, dieser Kreis ginge nicht durch D, dann müfste er AD schneiden (Aufg. 101 S. 52). Er schneide AD zwischen A und D in E. Verbindet man nun C mit dem Schnittpunkte E, so wäre nach dem vorigen Satze

$$\sphericalangle B + E = 180^0.$$

Es ist aber auch $\sphericalangle B + D = 180^0$. Daraus folgt $\sphericalangle B + E = B + D$ oder $\sphericalangle E = D$, was nach dem Satze vom Aufsenwinkel nicht möglich ist.

In gleicher Weise ergiebt sich der Beweis, dafs der Kreis nicht durch einen Punkt aufserhalb der Strecke AD gehen kann.

Es wäre noch denkbar, dafs AD den Kreis in A berührte. Diese Möglichkeit beseitigt Lehrsatz 39.

Anmerkung. Ein Viereck ist auch ein Kreisviereck, wenn $\sphericalangle ABD = ACD$ ist und die Linien BD und AC sich kreuzen. (S. 65, geom. Ort 6.)

12. Übungslehrsatz. Zu gleichen Peripheriewinkeln gehören gleiche Sehnen.

146. Aufgabe. Um welche Parallelogramme läfst sich ein Kreis beschreiben?

Vgl. Aufgabe 120. Hier zu lösen mit Lehrsatz 41.

§ 22. Die merkwürdigen Punkte im Dreieck.

Vorbemerkung. Die Sätze über den ersten und zweiten merkwürdigen Punkt (§ 19 S. 52) sind zu wiederholen. Dabei ist einzuschärfen, dafs das Dreieck keinen Mittelpunkt hat (S. 43) und dafs der Mittelpunkt des einbeschriebenen und des umbeschriebenen Kreises nicht verwechselt werden dürfen.

42. Lehrsatz. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte (Höhenpunkt).

Anleitung. Man ziehe durch die Ecken Parallele zu den Gegenseiten. Mit Hülfe eines Satzes vom Parallelogramm zeige man dann, dafs die Höhen des ursprünglichen Dreiecks Mittelsenkrechte im zweiten Dreieck sind.

43. Lehrsatz. Jede Mittellinie eines Dreiecks wird von jeder andern Mittellinie so geschnitten, dafs das

der Ecke zugewandte Stück doppelt so grofs ist wie das andere.

Beweis. Ich ziehe zwei beliebige Mittellinien BE und CF (Fig. 96). Ihr Schnittpunkt heifse O. Dann verbinde ich E mit F und die Mittelpunkte von BO und CO. Die letztere Linie MN sowohl als auch EF ist parallel zu BC und jede ist $\frac{1}{2}$ BC (vgl. Lehrsatz 26, 25). Darum ist $\triangle EOF \cong MON$ (2. Krit.). Setze ich $BM = x$, so ist $MO = x$ und $OE = x$; setze ich $CN = y$, so ist auch $NO = y$ und $OF = y$.

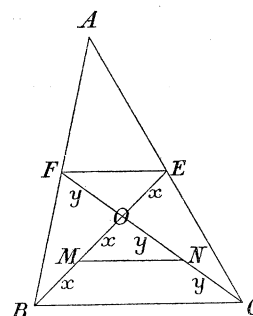


Fig. 96.

Es teilt also jede Mittellinie eine andere in der genannten Weise.

44. Lehrsatz. Die drei Mittellinien schneiden sich in einem Punkte (Schwerpunkt).

Beweis. Angenommen, die dritte Mittellinie ginge nicht durch O, sondern schnitte BE in Q. Dann wäre $QE = \frac{1}{3} BE = OE$ und somit ein Teil gleich dem Ganzen, was unmöglich ist.

Anmerkung. Kommen in einer Aufgabe mehrere Mittellinien vor, so richte man die Lösung so ein, dafs eine derselben durch die Zeichnung selbst zur Mittellinie wird. Der Beweis der Richtigkeit gestaltet sich dann wie der vorige.

Der Höhenpunkt heifst der dritte, der Schnittpunkt der Mittellinien heifst der vierte merkwürdige Punkt im Dreieck.

Der Winkel, welcher von den Linien gebildet wird, die man vom Auge zu dem tiefsten und höchsten Punkt eines Gegenstandes zieht, heifst Sehwinkel. Ein Körper erscheint um so gröfser, je gröfser dieser Winkel ist. Von jedem Punkt eines Bogens erscheint die Sehne gleich grofs, da die Peripheriewinkel über der Sehne gleich grofs sind.

13. Übungslehrsatz. Setzt man den Seiten eines Dreiecks nach aufsen hin drei gleichseitige Dreiecke auf und beschreibt um jedes der aufgesetzten Dreiecke den umbeschriebenen Kreis, so schneiden sich diese drei Kreise in einem Punkte (fünfter merkwürdiger Punkt). Vgl. „100 Aufgaben" S. 17.

Anleitung. Man wende Lehrsatz 40 und 41 an. — Unter welchen Sehwinkeln erscheinen die Seiten des Dreiecks vom fünften

merkwürdigen Punkte aus? Liegt er unter allen Umständen im Innern des Dreiecks?

14. Übungslehrsatz. Halbiert man zwei Aufsenwinkel, und den ihnen nicht anliegenden Dreieckswinkel, so schneiden sich die Teilungslinien in einem Punkte und dieser Punkt hat von der einen Seite und den Verlängerungen der beiden andern gleichen Abstand.

Der ***Beweis*** ist ähnlich wie bei Lehrsatz 34 S. 52. Ein Kreis, welcher eine Dreiecksseite und die Verlängerungen der beiden andern berührt, heifst anbeschriebener Kreis.

Ein Dreieck hat drei anbeschriebene Kreise. Ihre Mittelpunkte findet man durch Halbierung von je zwei Aufsenwinkeln.

Die Radien dieser drei Kreise bezeichnet man mit ρ_a, ρ_b, ρ_c, je nachdem sie die Dreiecksseiten a, b oder c berühren.

147. Aufgabe. Sind D, E und F die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises mit den Seiten a, b und c, so ist zu zeigen, dafs $BD = BF = \sigma - b$, $CD = CE = \sigma - c$, $AE = AF = \sigma - a$ ist, wenn σ den halben Umfang des Dreiecks bedeutet.

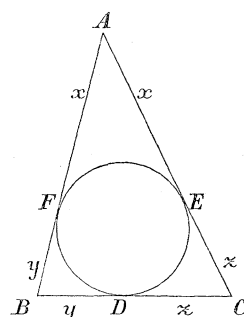


Fig. 97.

Anleitung. Aus Lehrsatz 36 S. 54 folgt die Richtigkeit der Bezeichnungen in nebenstehender Fig. 97.

Es ist $2x + 2y + 2z = a + b + c = 2\sigma$. Hieraus folgt: $x = \sigma - (y + z) = \sigma - a$, und ebenso:

$$y = \sigma - (x + z) = \sigma - b,$$
$$z = \sigma - (x + y) = \sigma - c.$$

148. Aufgabe. Bezeichnet man die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises wie vorhin und nennt man die Berührungspunkte des a anbeschriebenen Kreises, wie die Fig. 98 S. 70 angiebt, so ist zu zeigen, dafs

$$AH = AK = \sigma, \quad BG = BK = \sigma - c,$$
$$CG = CH = \sigma - b, \quad KF = a,$$
$$DG = BG - BD = b - c.$$

Anleitung. Man setze $BG = x$, $CG = y$. Dann ist $AK = c + x$, $AH = b + y$ und somit $AK + AH = 2AK = b + c + x + y = b + c + a = 2\sigma$. Ferner ist $BG = BK = AK - AB = \sigma - c$. Die übrigen Ableitungen sind ähnlich.

Fig. 98.

§ 23. Vermischte Aufgaben über die merkwürdigen Punkte.

149. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus $d = b + c - a, \alpha, \beta$.

Vorbereitung[1]. $b + c - a$ erinnert an $\frac{1}{2}(b + c - a)$; $\frac{1}{2}(b + c - a)$ ist aber gleich $\sigma - a$. Angenommen nun, ABC sei das verlangte Dreieck. Ich zeichne den einbeschriebenen Kreis. Dann ist (vorige Figur) $AF = \frac{d}{2}$, Winkel $FAO = \frac{\alpha}{2}$, $\measuredangle AFO = 90^0$.

Lösung. $\triangle AOF$ ist nach der zweiten Grundaufgabe zu zeichnen. Dann lege ich an AO in A den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ an, beschreibe um O mit OF einen Kreis und ziehe an denselben eine Tangente, welche mit der Verlängerung von AF den Winkel β bildet. Dieselbe schneidet die Verlängerungen von AF und AE in den Punkten B und C.

Beweis. Der Winkel BAC ist gleich $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$. Der Kreis berührt AB und AC, da O ein Punkt des Winkelhalbierers ist. Zu zeigen ist noch, daſs $AB + AC - BC = d$ ist. Es ist nun $AB + AC - BC = AF + FB + AE + EC - BD - DC$, oder da $BF = BD$, $CE = CD$ ist,

$$AB + AC - BC = AF + AE = 2\,AF = d.$$

Einschränkung. Die Aufgabe ist immer lösbar, wenn $\alpha + \beta < 180^0$.

150. Aufgabe. Man stelle an einer Figur $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma, r$

---

[1] Beispiel einer ausführlichen Lösung.

her und zeige daran, dafs von den Stücken $a, r, \alpha; b, r, \beta; c, r, \gamma$ das dritte bekannt ist, wenn die beiden andern gegeben sind.

151. Aufgabe. Es ist zu zeigen, dafs der Winkelhalbierer durch den tiefsten Punkt des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises geht.

152. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben ist α und r und der Punkt, in welchem m_α a trifft (m_α ist Halbierer des Winkels α. Entsprechendes bedeuten m_β und m_γ).

153. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus α, β, t_a.

Anleitung. Es sei $AE = AD + DE = 2\,t_b$. Man beschreibe über AE einen Kreisbogen, der $180^0 - \alpha$ fafst, und über AD einen Kreisbogen, der $\sphericalangle\ \beta$ fafst.

154. Aufgabe. Man gebe an, unter welchen Sehwinkeln vom fünften merkwürdigen Punkte aus die Seiten der aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke erscheinen.

Welche neue Eigenschaft dieses Punktes ergiebt sich aus dieser Winkelberechnung?

155. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus a, t_b, t_c.

Anleitung. Man zeichne zuerst ein Dreieck aus a, $\frac{2}{3}\,t_b$, $\frac{2}{3}\,t_c$ und beachte die Anmerkung S. 68.

156. Aufgabe. a, α, t_b; man verlängere t_b um sich selbst.

Die Hälfte des Parallelogramms kann man zeichnen.

Eine zweite Lösung erhält man, wenn man durch den Endpunkt E von t_b zu AB die Parallele EF zieht. Es ist dann $FC = \frac{1}{2}\,a$, $\sphericalangle\ FEC = \alpha$.

Aufgaben. Ein Dreieck zu zeichnen aus: ***157.*** α, t_a, t_b.

Man beschreibe über t_b einen Kreisbogen, der α fafst, und beachte Lehrsatz 43.

158. a, h_b, t_b; ***159.*** α, t_b, h_b; ***160.*** h_a, t_a, t_b; ***161.*** h_a, t_b, t_c.

Man ziehe durch den Endpunkt von t_b eine Senkrechte zu BC; dieselbe ist gleich $\frac{1}{2}\,h_a$.

162. t_a, h_b, h_c. Man ziehe durch den Fufspunkt von t_a Parallele zu h_b und h_c.

163. h_a, t_b, β; ***164.*** t_a, t_b, t_c. Siehe „100 Aufgaben" S. 12.

165. Aufgabe. Fällt man in einem Dreiecke die Höhe AD, so bezeichnet man DC durch p und DB durch q. p heifst Projektion oder Schatten von b, ebenso q Projektion von c auf a. Man trage nun q von D aus auf p ab und verbinde den Endpunkt E mit A. Es ist zu zeigen, dafs $AE = c$, $\sphericalangle\ EAC = \beta - \gamma$ ist.

Aufgaben. Ein Dreieck zu zeichnen aus: ***166.*** p, q, α; ***167.*** $b, c, \beta - \gamma$; ***168.*** $b, c, p - q$; ***169.*** $p - q, \beta - \gamma, h_a$.

170. Aufgabe. Es ist zu zeigen, dafs Winkel (h_a, m_a) gleich $\frac{\beta - \gamma}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{\gamma - \beta}{2}\right)$ ist.

Anleitung. Man beachte, dafs $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ und darum $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^0$ ist.

Aufgaben. Ein Dreieck zu zeichnen aus: ***171.*** $h_a, \beta - \gamma, b$; ***172.*** $h_a, \beta - \gamma, \rho$; ***173.*** $r, a, b + c$; ***174.*** $r, \beta, b - c$; ***175.*** $r, a, a + b + c$; ***176.*** a, α, ρ. — Winkel BOC ist gleich $90^0 + \frac{\alpha}{2}$; ***177.*** β, γ, ρ; ***178.*** a, m_a, ρ; ***179.*** a, r, ρ. („100 Aufgaben" S. 27.)

§ 24. Teilung einer Strecke in gleiche Teile. Das Paralleltrapez.

45. Lehrsatz. Zieht man durch zwei gerade Linien mehrere Parallele, so dafs die Abschnitte auf der einen einander gleich sind, so sind auch die Abschnitte auf der andern einander gleich (Verallgemeinerung von Lehrsatz 25. Vgl. auch Aufgabe 81).

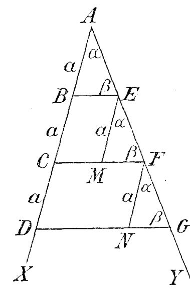


Fig. 99.

Herstellung der Figur. Auf der einen Geraden AX (Fig. 99) trage ich die gleichen Strecken AB, BC u. s. w. ab und ziehe durch B, C u. s. w. Linien, die unter sich parallel sind und die andere Linie in E, F, G u. s. w. schneiden mögen.

Behauptung. $AE = EF = FG$.

Beweis. Ich ziehe durch E, F, G Parallele zu AX, die jene erstern Parallelen in M, N u. s. w. schneiden mögen. Nenne ich nun $\sphericalangle\, BAE\ \alpha$ und $BEA\ \beta$ sowie $AB\ a$, so können die Stücke so bezeichnet werden, wie in der Figur geschehen ist. Man sieht dann sofort, dafs $\triangle\ ABE \cong EMF \cong FNG$ ist. Daraus folgt $AE = EF = FG$.

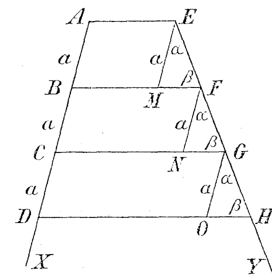


Fig. 100.

Für die Fig. 100, in der sich die Geraden nicht schneiden, gilt derselbe Beweis. Sind die Geraden parallel, so wird der Beweis geführt mit Hülfe des Satzes von den Gegenseiten eines Parallelogramms.

180. Aufgabe. Es ist die Aufgabe 77 zu wiederholen.

46. Lehrsatz. Zieht man durch den Mittelpunkt der einen nicht parallelen Seite eines Paralleltrapezes eine Parallele zur Grundlinie, so halbiert sie die andere nicht parallele Seite und ist gleich der halben Summe der parallelen Seiten.

Beweis. Der erste Teil des Satzes folgt unmittelbar aus dem vorigen Lehrsatz. Um den zweiten Teil zu beweisen, ziehe man durch C zu AE (Fig. 68) eine Parallele. Dann ist $\triangle JFC \cong HDC$. Darum ist $JF = HD$. Beide Strecken seien X genannt. Es ist dann

$$AD = AH + X$$
$$EF = EJ - X$$

und somit
$$AD + EF = 2BC = AH + EJ$$

oder
$$BC = \frac{1}{2}(AH + EJ).$$

§ 25. Inhalt und Inhaltsgleichheit von Figuren.

Der Inhalt einer Figur ist die Fläche, welche von der Begrenzung der Figur umschlossen ist.

Figuren, welche denselben Inhalt haben, nennt man inhaltsgleich oder kurzweg gleich.

Den Inhalt einer Figur messen heifst angeben, wievielmal so grofs er ist als der Inhalt eines beliebig gewählten Quadrates.

Das beliebig gewählte Quadrat heifst Flächeneinheit. Wir nehmen als Einheit das Quadratmeter, welches gesetzlich als solche angenommen ist.

181. Aufgabe. Wieviel Quadratcentimeter hat ein Quadratmeter, wieviel Quadratmillimeter ein Quadratcentimeter?

Anmerkung. Man veranschauliche die Verhältnisse durch Zeichnung.

182. Aufgabe. Wieviel Quadratmeter hat ein Rechteck, das $a\,m$ lang und $b\,m$ breit ist?

Lösung. Der Inhalt ist gleich $a \cdot b\,qm$. Zieht man nämlich durch die Endpunkte der a Meter, welche auf der Länge abgetragen sind, Parallele zu der Breite und ebenso durch die Endpunkte der einzelnen Meter auf der Breite Parallele zur Länge, so wird dadurch das Rechteck in $a \cdot b\,qm$ geteilt.

183. Aufgabe. Die Länge eines Rechtecks betrage 7,6 m, die Breite 3,4 m; wie grofs ist der Inhalt?

Lösung. Man teile die Länge in 760 *cm* und die Breite in 340 *cm*. Dann ziehe man wie vorhin Parallele. Es zerfällt dadurch das Rechteck in 760 · 340 *qcm* oder in 258 400 *qcm*.

Nun sind 10 000 *qcm* gleich 1 *qm*. Also erhalten wir 25,84 *qm*. Dasselbe Ergebnis wird aber erhalten, wenn man 7,6 mit 3,4 multipliziert.

184. Aufgabe. Die Länge eines Rechtecks ist gleich 7,64 *m*, die Breite gleich 3,84; wie grofs ist der Inhalt?

Lösung. Nach der vorigen Anleitung teile man das Rechteck in Quadratcentimeter. Es ergeben sich 265 872 *qcm* oder 26,5872 *qm*.

185. Aufgabe. Die Länge eines Rechtecks sei a, die Breite b; wie grofs ist der Inhalt?

Lösung. Diese Aufgabe wird also gelöst: Ich messe a und b mit dem Metermafs. Die Messung kann so genau ausgeführt werden, wie man nur wünscht. Es sei $a = 1{,}5234$, $b = 2{,}389$ gefunden. Dann teile ich das Rechteck in Quadrate, deren Seite gleich $^1/_{10}$ *mm* ist. Es ergiebt sich als Inhalt 15234 · 23890 Quadrate, von denen jedes $^1/_{10}$ *mm* lang ist. Diese führe ich nach dem vorhin angewandten Verfahren auf Quadratmeter zurück und erhalte gerade so viel, als wenn ich von vornherein 1,5234 mit 2,389 multipliziert hätte. Diesen Andeutungen kann man durch Einführung des gemeinsamen Streckenmafses (§ 28) eine strengere Form geben. Wir folgern:

47. Lehrsatz. Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkte aus Länge und Breite.

48. Lehrsatz. Der Inhalt eines Quadrates ist gleich dem Quadrate der Seite.

Beweis. Ein Quadrat ist ein Rechteck mit gleichen Seiten. Deshalb ist der Inhalt desselben gleich dem Quadrate der Seite.

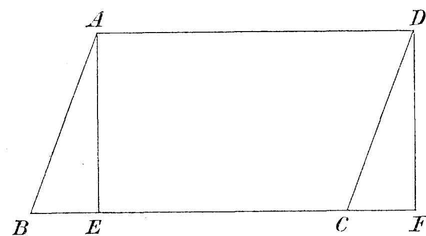


Fig. 101.

49. Lehrsatz. Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe.

Beweis. Von A und D fälle ich auf BC (Fig. 101) bezüglich auf die Verlängerung von BC die Senkrechten AE und DF. Dadurch entsteht das Rechteck $AEFD$. Die Dreiecke BAE und CDF sind kongruent. Hieraus folgt, dafs dieselben gleich sind und dafs $BE = CF$ ist.

Addiere ich nun zu dem Viereck $AECD$ das Dreieck ABE, so erhalte ich den Inhalt des Parallelogramms $ABCD$. Addiere ich aber zu demselben Vierecke den Inhalt des Dreiecks DCF, so erhalte ich den Inhalt des Rechtecks $AEFD$. Das Parallelogramm hat also denselben Inhalt wie das Rechteck. Der Inhalt des Rechtecks ist aber gleich $AE \cdot EF$. Es ist nun

$$EF = EC + CF = EC + EB = BC.$$

Darum ist der Inhalt des Rechtecks oder der ihm gleiche Inhalt des Parallelogramms gleich $AE \cdot BC$, wie behauptet wurde.

Anmerkung. Haben zwei Parallelogramme gleiche Grundlinie und Höhe, so sind sie gleich.

Ist nämlich die Grundlinie gleich a, die Höhe gleich h, so haben beide den Inhalt $a \cdot h$.

50. Lehrsatz. Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus Grundlinie und Höhe.

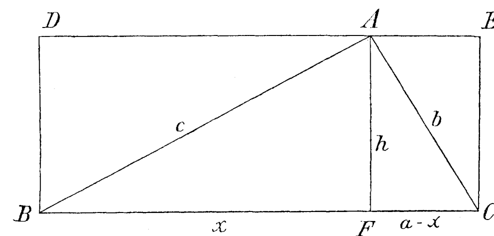


Fig. 102.

Beweis. Zieht man durch die Spitze A des Dreiecks ABC (Fig. 102) eine Parallele und fällt man auf dieselbe von B und C die Senkrechten BD und CE, so ist $\triangle\ AFC \cong CEA$ und $\triangle\ DBA \cong FAB$. Somit ist der Inhalt des Dreiecks ABC die Hälfte des Rechtecks. Letzteres ist nach der Figur gleich $a \cdot h$. Folglich ist der Inhalt von ABC gleich $\frac{a \cdot h}{2}$.

Anmerkung. Dreiecke von gleicher Grundlinie a und gleicher Höhe h sind inhaltsgleich. Ihr Inhalt ist nämlich gleich $\frac{a \cdot h}{2}$.

186. Aufgabe. Man zeige, dafs eine Mittellinie ein Dreieck in zwei inhaltsgleiche zerlegt.

51. Lehrsatz. Der Inhalt eines Paralleltrapezes ist gleich dem Produkte aus der Höhe und der halben Summe der parallelen Seiten.

Beweis. Der Inhalt des Paralleltrapezes $AEJH$ (Fig. 68) ist gleich dem Inhalte des Parallelogramms $AEFD$, da die Dreiecke DCH und FCJ gleich sind. (Durch Verschiebung des Dreiecks FJC wird die eine Figur aus der andern erhalten; vgl. Aufgabe 77.) Der Inhalt des Parallelogramms ist aber gleich

dem Produkte aus EF und der Höhe des Paralleltrapezes. EF ist aber gleich $BC = \frac{1}{2}(EJ + AH)$. Folglich ist der Inhalt des Paralleltrapezes gleich $\frac{1}{2}(EJ + AH)$ multipliziert mit der Höhe.

187. Aufgabe. Ein Viereck in ein Dreieck gleichen Inhalts zu verwandeln.

Lösung. Ich ziehe eine beliebige Diagonale, etwa AC (Fig. 103), und durch D zu ihr eine Parallele, welche die Verlängerung von BA in E schneiden möge. Der Inhalt des Dreiecks BEC ist dann gleich dem Inhalt des Vierecks. Der Inhalt des Dreiecks EAC ist nämlich gleich dem Inhalt des Dreiecks DAC, da beide dieselbe Grundlinie AC und gleiche Höhe, den Abstand der Parallelen, haben. Mit dem Viereck $ABCD$ hat das Dreieck EBC das Stück ABC gemeinsam. Addiert man hierzu EAC, so bekommt man den Inhalt von EBC; addiert man anderseits zum selben Stück das Dreieck ACD, so erhält man den Inhalt des Vierecks. Folglich ist der Inhalt von EBC gleich dem Inhalt von $ABCD$.

Fig. 103.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist einer Verallgemeinerung fähig. Hat man z. B. ein Fünfeck, so verbindet man zuerst zwei nicht benachbarte Eckpunkte und wendet das obige Verfahren an. Das entstandene Viereck verwandelt man dann in ein Dreieck.

§ 26. Der Pythagoreische Lehrsatz.

52. Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

Herstellung der Figur. Ich zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC (Fig. 104) und errichte über den Seiten die Quadrate $BHJC$, $AEDC$ und $AFGB$, den Seiten gebe ich die Bezeichnung a, b, c.

Behauptung. $a^2 = b^2 + c^2$.

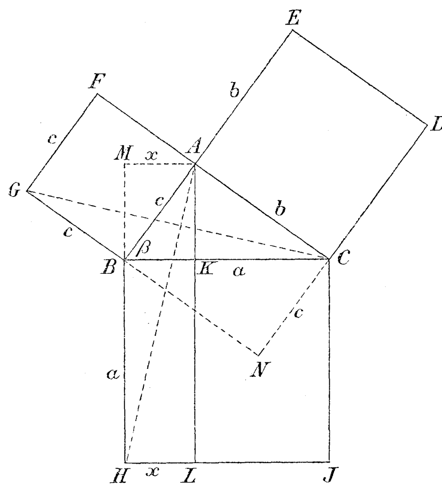


Fig. 104.

Erster Beweis. Ich fälle von A auf HJ die Senkrechte AL, welche BC in K schneiden möge. Dann verbinde ich A mit H und C mit G. Ferner fälle ich von A auf die Verlängerung von HB die Senkrechte AM und von C auf die Verlängerung von GB die Senkrechte CN.

Die Bezeichnung der Strecken mit den Buchstaben a, b, c in der Figur ist von selbst einleuchtend. Wenn ich noch AM mit x benenne, so ist auch LH gleich x.

Das Dreieck GBC ist nun kongruent ABH, wie die beigeschriebene Bezeichnung sofort ergiebt. Sehr anschaulich wird die Kongruenz gezeigt, wenn man das eine Dreieck passend um 90^0 dreht. Folglich ist der Inhalt von GBC gleich dem Inhalte von ABH. Der Inhalt von GBC ist aber gleich $\frac{c \cdot c}{2} = \frac{c^2}{2}$, der Inhalt von $ABH = \frac{a \cdot x}{2}$. Also ist $c^2 = a \cdot x$. Es ist aber $a \cdot x$ der Inhalt des Rechtecks $BHLK$, c^2 der Inhalt des Quadrates über der Kathete AB. Somit ist der Inhalt dieses Quadrates gleich dem Inhalt des genannten Rechtecks.

Ebenso läſst sich beweisen, daſs der Inhalt des Quadrates über AC gleich dem Inhalt des Rechtecks $KLJC$ ist.

Darum ist die Summe der Quadrate über den beiden Katheten gleich dem Inhalt des Quadrates über der Hypotenuse. Der Satz ist somit bewiesen.

Zweiter Beweis. Auf den Seiten des Quadrates $ABCD$ (Fig. 105) trage ich die gleichen Strecken AE, BF, CG, DJ ab, die mit b bezeichnet werden sollen. Die Strecken EB, FC, GD, JA nenne ich c. Verbinde ich nun die Punkte E, F, G, J zu einem Viereck, so sind zunächst die vier Dreiecke AEJ, BFE, CGF, DJG kongruent. Daraus folgt $EF = FG = GJ = JE$.

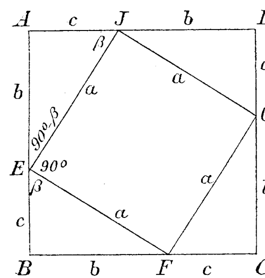


Fig. 105.

Ich benenne diese Strecken mit a. Wenn ich nun den Winkel AJE durch β bezeichne, so ist $\sphericalangle\, AEJ = 90^0 - \beta$ und $\sphericalangle\, BEF$ gleich β. Dann ist $\sphericalangle\, JEF = 90^0$.

Viereck $JEFG$ ist also ein Quadrat. Der Inhalt dieses Quadrates ist gleich dem ursprünglichen Quadrat, vermindert um die vier Dreiecke.

Es ist also: $a^2 = (b + c)^2 - 4\frac{b \cdot c}{2}$,

oder: $a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 2bc$,

oder: $a^2 = b^2 + c^2$.

Anmerkung. Der Lehrsatz ist von Pythagoras (um 500 v. Chr.) gefunden.

53. Lehrsatz. Ist in einem Dreiecke das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten, so liegt der erstern ein rechter Winkel gegenüber.

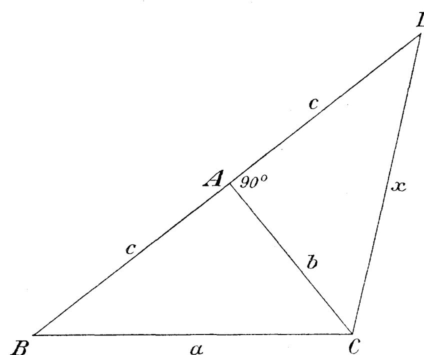


Fig. 106.

Beweis. In dem Dreieck ABC (Fig. 106) ist $a^2 = b^2 + c^2$. Es soll bewiesen werden, daſs $\measuredangle\, BAC = 90^0$ ist. Zu dem Zweck errichte ich auf AC in A eine Senkrechte und trage darauf $AD = c$ ab. Die Strecke CD nenne ich x. Dann ist, da $\measuredangle\, CAD = 90^0$ ist,

$$x^2 = b^2 + c^2.$$

Da nun $a^2 = b^2 + c^2$ ist, so folgt: $x^2 = a^2$ oder $x = a$. Somit ist Dreieck $CAB \cong CAD$ (3. Krit.) und darum $\measuredangle\, BAC = DAC = 90^0$.

188. Aufgabe. Man zeichne $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ u. s. w.

Lösung. Es ist $2 = 1^2 + 1^2$; $3 = 2^2 - 1^2$; $5 = 2^2 + 1^2$; $6 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$; $7 = 4^2 - 3^2$ u. s. w.[1]

Man sieht, daſs jede Zahl als Differenz zweier Quadrate dargestellt werden kann. Diese Bemerkung genügt, um die Wurzel aus einer Nichtquadratzahl geometrisch zu zeichnen. Zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gleich 1 sind, so ist die Hypotenuse gleich $\sqrt{2}$. Um $\sqrt{7}$ zu zeichnen, stelle man ein rechtwinkliges Dreieck her, dessen Hypotenuse gleich 4 und dessen eine Kathete gleich 3 ist. Die andere Kathete ist dann $\sqrt{7}$.

§ 27. Von den Verhältnisgleichungen.

Eine Verhältnisgleichung $a : b = c : d$ ist die Gleichstellung zweier Brüche.

[1] Allgemein: $\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 = a$.

Dieselbe kann auch $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ geschrieben werden; a, b, c, d heifsen der Reihe nach das erste, zweite, dritte und vierte Glied. a und c werden auch die vorangehenden, b und d die nachfolgenden Glieder genannt. Ferner nennt man noch a und d die äufsern, b und c die innern Glieder.

1. Hauptsatz. In jeder richtigen Verhältnisgleichung ist das Produkt der äufsern Glieder gleich dem Produkte der innern Glieder.

Beweis. Es sei $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Multipliziere ich diese Gleichung mit bd, so ergiebt sich $\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d}$ oder $a \cdot d = b \cdot c$.

2. Hauptsatz. Ist in einer Verhältnisgleichung das Produkt der äufsern Glieder gleich dem Produkte der innern Glieder, so ist die Verhältnisgleichung richtig.

Beweis. Von der Verhältnisgleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ wissen wir vorläufig noch nicht, ob sie richtig ist. Es steht nur fest, dafs $ad = bc$ ist. Dividiere ich nun die Gleichung $ad = bc$ durch bd, so erhalte ich $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, wodurch die Richtigkeit dieser Verhältnisgleichung bewiesen ist.

3. Satz. In jeder Verhältnisgleichung lassen sich die innern und äufsern Glieder unter sich und miteinander vertauschen.

Beweis. Es ist zu zeigen, dafs, wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist, auch folgende Verhältnisgleichungen richtig sind: 1) $a : c = b : d$; 2) $d : b = c : a$; 3) $b : a = d : c$.

Alle diese Gleichungen sind nach dem zweiten Hauptsatze richtig, da in jeder das Produkt der äufsern Glieder gleich dem Produkte der innern ist. Diese Produkte sind nämlich $a \cdot d$ und $b \cdot c$, welche wegen der als richtig angenommenen Gleichung $a : b = c : d$ einander gleich sind.

4. Aus der Verhältnisgleichung $a : b = c : d$ gewinnt man unter vielen andern noch folgende richtige Gleichungen:

$$1)\ \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c};\ 2)\ \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d};\ 3)\ \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c};$$

$$4)\ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d};\ 5)\ \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d};\ 6)\ \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d};$$

$$7)\ \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}.$$

Weil der Beweis der Richtigkeit für alle in derselben Weise geführt wird, so soll nur die fünfte Gleichung als richtig bewiesen werden.

Soll $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ richtig sein, so mufs nach Satz 2 $(a+b)(c-d) = (a-b)(c+d)$ sein. Die Ausführung ergiebt:

$$bc = ad.$$

Letztere Gleichung ist richtig, da $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ richtig ist; folglich ist auch die Verhältnisgleichung $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ richtig.

§ 28. Verhältnisgleichungen von Strecken.

Zwei Strecken kann man mit demselben Mafse messen. Reicht hierzu das Meter- oder Centimetermafs nicht aus, so wählt man das Millimeter oder selbst noch Teile vom Millimeter. Jedenfalls kann der Fehler unter jede denkbare Grenze der Kleinheit herabgedrückt werden.

Unter dem aus zwei Strecken gebildeten Bruch oder Verhältnis versteht man folgendes: Man messe beide Strecken mit dem gemeinsamen Mafse. Der Bruch aus ihren Mafszahlen ist das Verhältnis oder der Bruch der beiden Strecken.

Die Quadratwurzel aus einer Nichtquadratzahl kann niemals durch einen Quotienten ganzer Zahlen völlig genau ausgedrückt werden. (Vgl. „100 Aufgaben“ S. 49, 51 und 52; ferner „Arithmetik“ S. 78.) Daher haben Seite und Diagonale des Quadrats niemals ein gemeinsames Mafs in strengem Sinne. Sie sind inkommensurable Gröfsen. Dennoch kann ihr Verhältnis mit jedem beliebigen Grade der Genauigkeit durch einen Bruch dargestellt werden.

Nach dieser Erklärung kann man die Sätze über Verhältnisgleichungen auch auf Strecken ausdehnen.

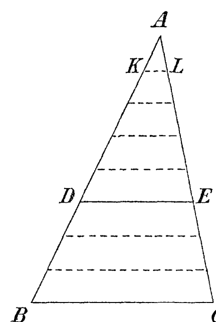


Fig. 107.

54. Lehrsatz. Eine zur Grundlinie des Dreiecks gezogene Parallele teilt die Seiten in verhältnisgleiche Stücke.

Behauptung. $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$.

Beweis. Ein gemeinsames Mafs der Strecken AD und BD (Fig. 107) sei AK, und es sei $AD = m \cdot AK$, $BD = n \cdot AK$. AK trage ich nun $m$mal auf AD und $n$mal auf BD ab. Durch die Endpunkte ziehe ich zu BC parallele Linien. Nach Lehrsatz 45 wird dann AE

in m und EC in n gleiche Teile geteilt. Jeder Teil sei gleich AL. Dann ist $AE = m \cdot AL$ und $EC = n \cdot AL$.

Es ist also $\frac{AD}{BD} = \frac{m \cdot AK}{n \cdot AK} = \frac{m}{n}$ und $\frac{AE}{EC} = \frac{m \cdot AL}{n \cdot AL} = \frac{m}{n}$.

Daraus folgt: $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$.

Aus der Verhältnisgleichung $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$ folgen noch:

1. $\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{EC}$ (§ 27, 3. Satz).

2. $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$; denn wenn $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$ ist, so ist auch $\frac{AD}{BD + AD} = \frac{AE}{AE + EC}$ oder $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ oder $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ (§ 27, 4).

3. $\frac{DB}{EC} = \frac{AB}{AC}$. Dies ist abzuleiten wie die vorhergehende Verhältnisgleichung.

Der vorige Lehrsatz kann weitläufiger folgendermaſsen entwickelt werden:

Werden zwei Seiten durch eine zur Grundlinie parallele Linie geschnitten, so verhalten sich die obern Abschnitte zu einander wie die untern, die obern Abschnitte wie die ganzen Seiten, die untern Abschnitte wie die ganzen Seiten, und ein oberer Abschnitt zur ganzen Seite wie die Parallele zur Grundlinie.

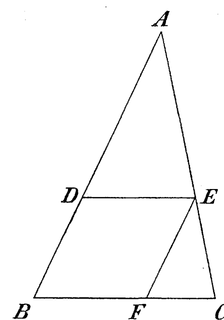


Fig. 108.

Beweis. Der erste, zweite und dritte Teil des Satzes ist durch die Ableitung der Verhältnisgleichungen 1, 2, 3 des vorigen Satzes bewiesen. Die vierte Behauptung soll nun erwiesen werden. Durch E (Fig. 108) ziehe ich eine Parallele EF zu AB. Dann ist nach dem Vorhergehenden $\frac{AE}{BF} = \frac{AC}{BC}$, oder da $BF = DE$,

$$\frac{AE}{DE} = \frac{AC}{BC} \text{ oder } \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Ebenso läſst sich nachweisen $\frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC}$.

55. Lehrsatz. Teilt eine Linie die Seiten eines Dreiecks in verhältnisgleiche Teile, so ist sie der Grundlinie parallel.

Der Beweis ist ähnlich wie bei Lehrsatz 26 S. 42 indirekt zu führen.

§ 29. Ähnliche Dreiecke. Verschiedene Übungen.

Betrachten wir in der Fig. 107 die Dreiecke ADE und ABC, so bemerken wir, daſs

1. die Winkel in beiden Dreiecken paarweise gleich sind;

2. die Brüche aus je zwei entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke, d. h. aus solchen Seiten, die gleichen Winkeln gegenüberliegen, einander gleich sind.

Solche Dreiecke heiſsen ähnliche Dreiecke ($\sim$ ähnlich). Für die Ähnlichkeit zweier Dreiecke giebt es, den Kriterien der Deckung entsprechend, Merkmale, welche die Kriterien der Ähnlichkeit genannt werden. Sie lauten:

56. Lehrsatz (1. Krit.). Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in dem Verhältnis zweier Seiten und in dem von ihnen gebildeten Winkel.

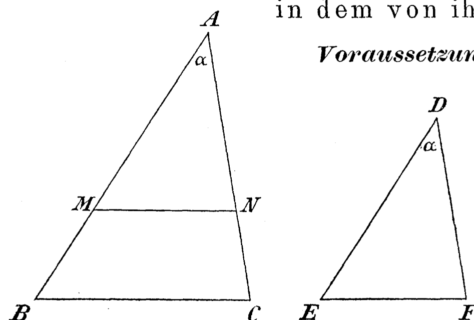


Fig. 109.

Voraussetzung[1]. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (Fig. 109) und $\measuredangle A = D$.

Behauptung. $\triangle ABC \sim DEF$.

Beweis. Ich trage DE auf AB von A aus ab. Den Endpunkt nenne ich M. Dann ziehe ich durch M zu BC eine Parallele, welche AC in N schneiden möge. $\triangle AMN$ ist nun dem $\triangle ABC$ ähnlich. $\triangle DEF$ ist aber kongruent dem Dreiecke AMN. Es ist nämlich $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ und $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN}$ (Lehrsatz 54). Daraus folgt: $\frac{DE}{DF} = \frac{AM}{AN}$, und da $DE = AM$ ist, $DF = AN$. Ferner ist $\measuredangle A = D$, somit $\triangle DEF \cong AMN$ und folglich $\triangle DEF \sim ABC$.

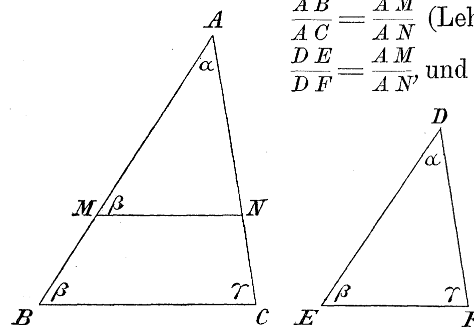


Fig. 110.

57. Lehrsatz (2. Krit.). Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

---

[1] Ausführliche Darstellung.

Voraussetzung [1]. $\measuredangle B = E$, $\measuredangle C = F$ (Fig. 110).

Behauptung. $\triangle DEF \sim ABC$.

Beweis. Wiederholt man dieselbe Zeichnung wie vorhin, so ist $\triangle AMN \sim ABC$. Nun ist aber $\triangle AMN \cong DEF$; denn es ist $AM = DE$, $\measuredangle A = D$ und $\measuredangle M = E$, da $\measuredangle M = B$ und $\measuredangle B = E$ ist. Es ist somit auch $\triangle DEF \sim ABC$.

58. Lehrsatz (3. Krit.). Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in dem Verhältnis der drei Seiten.

Voraussetzung. $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

Behauptung. $\triangle DEF \sim ABC$.

Beweis. Stellt man in derselben Weise die Figur her wie bei Lehrsatz 56, so ist nachzuweisen, daſs $\triangle DEF \cong AMN$ ist.

Aus den beiden Gleichungen $\frac{AM}{MN} = \frac{AB}{BC}$ und $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ folgt $\frac{AM}{MN} = \frac{DE}{EF}$ und hieraus, da $AM = DE$ ist, $MN = EF$. Ebenso ergiebt sich aus $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$ und $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$, daſs $AN = DF$. Es ist somit $\triangle AMN \cong DEF$ und folglich $DEF \sim ABC$.

59. Lehrsatz (4. Krit.). Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in dem Verhältnis zweier Seiten und in dem Winkel, welcher der gröſsern von diesen Seiten gegenüberliegt.

Voraussetzung. $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$, $AB > AC$, $\measuredangle C = F$.

Behauptung. $\triangle DEF \sim ABC$.

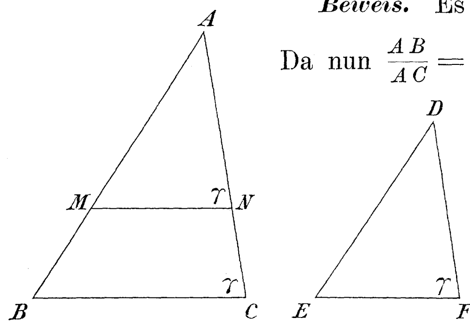


Fig. 111.

Beweis. Es ist (Fig. 111) $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$. Da nun $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ ist, so folgt $\frac{AM}{AN} = \frac{DE}{DF}$, woraus sich $AN = DF$ ergiebt. Ferner ist $\measuredangle N = C$ und $\measuredangle C = F$, darum auch $\measuredangle N = F$. Daher ist Dreieck $DEF \cong AMN$ und folglich $\triangle DEF \sim ABC$.

189. Aufgabe. Wie unterscheidet sich der Wortlaut der vier Kriterien der Ähnlichkeit von denen der Kongruenz?

---

[1] Ausführliche Darstellung.

190. Aufgabe. Es ist zu zeigen, dafs bei ähnlichen Dreiecken jede Seite des einen Dreiecks dasselbe Vielfache von der entsprechenden Seite des andern ist.

Anleitung. Wenn bei den ähnlichen Dreiecken ABC und DEF Seite $AB = p \cdot DE$ ist, so folgt aus der Gleichung $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$, dafs $\frac{p \cdot DE}{AC} = \frac{DE}{DF}$ oder $AC = p \cdot DF$ ist. Ebenso ergiebt sich $BC = p \cdot EF$.

Anmerkung. Dasselbe läfst sich für je zwei entsprechende Linien, z. B. für zwei entsprechende Höhen nachweisen.

60. Lehrsatz. Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten (Strecken).

Beweis. Sind I, I_1 die Inhalte, a, h, a_1, h_1 die entsprechenden Seiten und Höhen, so ist $2I = ah$, $2I_1 = a_1 h_1$. Da $a_1 = pa$, $h_1 = ph$ gesetzt werden kann, so folgt:

$$2I_1 = p^2 ah, \quad I_1 : I = a_1{}^2 : a^2.$$

191. Aufgabe. Man berechne die Diagonalen eines Quadrates, dessen Seite gleich a oder 3,4 ist.

192. Aufgabe. In einem gleichschenkligen Dreieck ist $b = c = 6{,}4$, $a = 4{,}08$. Man berechne die Höhe zur Grundlinie.

193. Aufgabe. In einem Rhombus ist die Diagonale r gleich der Seite. Man berechne die andere Diagonale.

194. Aufgabe. Man berechne die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite gleich a ist.

* ***195. Aufgabe.*** Durch einen Punkt P ist eine Sekante gezogen, die den Mittelpunkt des Kreises trifft. Ihre Länge ist a, der Radius des Kreises r. Wie grofs ist die von P an den Kreis gezogene Tangente? (Durch Rechnung und mit Hülfe von ähnlichen Dreiecken zu lösen. Fig. 125 S. 98.)

* ***196. Aufgabe.*** Durch einen Punkt O innerhalb eines Kreises sind die Sehnen AB und CD gezogen. Es ist $OA = 2{,}4$, $OB = 3{,}1$, $OC = 4{,}5$. Wie grofs ist OD?

Lösung. Man verbinde A mit C und D mit B. Dann ist $OCA \sim OBD$ und darum $\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB}$ oder $OA \cdot OB = OC \cdot OD$. Die Zahlenwerte ergeben $OD = \frac{2{,}4 \cdot 3{,}1}{4{,}5}$.

* ***197. Aufgabe.*** Man wiederhole die vorige Aufgabe, wenn O aufserhalb des Kreises liegt und wenn $OA = 6{,}8$, $OB = 12{,}4$, $OC = 4{,}9$ ist.

198. Aufgabe. Man zeichne den Ausdruck $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Lösung. Ich zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten a und b sind. Dann ist die Hypotenuse gleich $\sqrt{a^2 + b^2}$. (Ähnlich bestimme man $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.)

* ***199. Aufgabe.*** Man zeichne $\frac{b \cdot c}{a}$.

Anleitung. Von den Schenkeln eines beliebigen Winkels mache man den einen gleich b, den andern gleich a, verlängere a um c und ziehe eine zweckmäſsige Parallele. (S. auch unten S. 98.)

* ***200. Aufgabe.*** In dem gleichschenkligen Dreieck ABC ist der Winkel an der Spitze A gleich 36^0. Man halbiere den $\measuredangle B$ durch BD und zeige durch die Methode der Winkelberechnung, daſs $ABC \sim BDC$ ist.

* ***201. Aufgabe.*** Man fälle in dem rechtwinkligen Dreieck ABC die Hypotenusenhöhe AD. Es ist zu zeigen, daſs $ABC \sim DBA \sim DAC$ ist.

Anleitung. Man benenne $\measuredangle B$ mit β und wende dann die Methode der Winkelberechnung an.

Anmerkung. Hieran knüpfen sich passend Aufgaben über Berechnung von Strecken, z. B.: Es sei $BC = 5$, $AB = 4$, $AC = 3$; man suche die Länge der Höhe AD, die Gröſse von BD und CD.

Es empfiehlt sich, zuerst rechnend vorzugehen (drei Gleichungen mit drei Unbekannten). Die Berechnung mit Hülfe von ähnlichen Dreiecken läſst dann den groſsen Vorteil der Ähnlichkeitsmethode besonders deutlich erkennen.

202. Aufgabe. Man verbinde die Ecken eines Dreiecks mit dem Schnittpunkt O der Mittellinien und zeige, daſs die Dreiecke BOC, COA und AOB gleichen Inhalt haben.

Anleitung. Man ziehe eine Mittellinie, etwa AD, und verbinde B und C mit O. Darauf fälle man von A und O auf BC die Senkrechten AE und OF. Dann liegen ähnliche Dreiecke vor, aus denen man schlieſst $OF = \frac{1}{3} AE$. Ferner wende man Lehrsatz 50 S. 75 an.

* ***203. Aufgabe.*** Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks ist gleich 10. Man berechne die Seite, die Höhe und den Radius des umbeschriebenen Kreises.

204. Aufgabe. Wann sind zwei Rhomben einander ähnlich?

205. Aufgabe. Man wiederhole die Aufgabe, ein Dreieck in n^2 kongruente Dreiecke zu zerlegen.

206. Aufgabe. Man zeige mit Hülfe von ähnlichen Dreiecken, daſs die Seiten desjenigen Parallelogramms, das man

durch Verbinden der Mittelpunkte der Seiten eines gegebenen Parallelogramms erhält, gleich den halben Diagonalen des letztern sind.

207. Aufgabe. Es ist nachzuweisen, dafs das vorhin genannte Parallelogramm gleich der Hälfte des ursprünglichen ist.

208. Aufgabe. Man zeige, dafs in einem Tangentenvierecke (einem dem Kreise umbeschriebenen Viereck) die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der beiden andern Gegenseiten ist.

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist zu beweisen. — Wann ist ein Parallelogramm ein Tangentenviereck?

209. Aufgabe. Es ist zu zeigen, dafs der Inhalt des Dreiecks $ABC = \frac{1}{4} ac$ ist, wenn $\sphericalangle B = 30^0$ ist.

210. Aufgabe. Man beweise mit Hülfe von ähnlichen Dreiecken den Satz von den Mittellinien.

Lösung. Ziehe ich die Mittellinien BE und CF (Fig. 112) und verbinde E mit F, so ist $\triangle AFE \sim ABC$; denn da $\frac{AF}{AB} = \frac{1}{2}$ und $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{2}$, so ist $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC}$ oder $\frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AC}$. Die beiden Dreiecke stimmen also in dem Verhältnis zweier Seiten überein. Aufserdem haben sie noch den $\sphericalangle A$ gemeinsam. Sie sind also ähnlich nach dem 1. Krit. Aus der Ahnlichkeit folgt $\sphericalangle F = B$, d. h. FE ist parallel BC. Da ferner $AF = \frac{1}{2} AB$ ist, so ist auch $FE = \frac{1}{2} BC$ (vgl. Aufg. 190). Nun ist $\triangle FOE \sim COB$ (2. Krit.) und darum ist $OF = \frac{1}{2} OC$ und $OE = \frac{1}{2} OB$, da $FE = \frac{1}{2} BC$ ist.

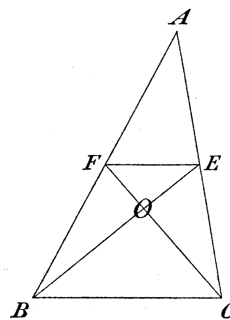


Fig. 112.

211. Aufgabe. Man zeige, dafs der Inhalt eines Dreiecks $= \sigma \cdot \rho$ ist. $2\sigma = a + b + c$ (S. 69).

* ***212. Aufgabe.*** Man zeige, dafs der Inhalt eines Dreiecks gleich $\sqrt{\sigma(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c)}$ ist.

Lösung. In der Fig. 98 S. 70 ist $\triangle FOB \sim KBQ$ und darum

$$\frac{\rho}{\sigma - b} = \frac{\sigma - c}{\rho_a}$$

oder
$$\rho \cdot \rho_a = (\sigma - b)(\sigma - c).$$

Der Inhalt des Dreiecks ist aber $QBA + QCA - QBC = \frac{1}{2}\rho_a \cdot c + \frac{1}{2}\rho_a \cdot b - \frac{1}{2}\rho_a \cdot a = \rho_a(\sigma - a)$. Nennen wir den Inhalt I, so haben wir (vgl. Aufgabe 211) $I = \rho . \sigma$ und $I = \rho_a(\sigma - a)$. Daraus folgt durch Multiplikation:

$$I^2 = \rho \cdot \rho_a \cdot \sigma(\sigma - a),$$

oder da $\rho \cdot \rho_a = (\sigma - b)(\sigma - c)$ ist,

$$I^2 = \sigma(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c)$$

oder $$I = \sqrt{\sigma(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c)}.$$

Anmerkung. Die mit einem * versehenen Aufgaben sind bei der Wiederholung im zweiten Jahrgange zu lösen.

Lehraufgabe der Untersekunda.

Vorbemerkung.

Die gesamte Ähnlichkeitslehre ist zunächst zu wiederholen. Dabei sind die im Vorjahre übergangenen Aufgaben zu lösen.

§ 30. Aufgaben über die regelmäfsigen einbeschriebenen und umbeschriebenen Vielecke.

213. Aufgabe. In einen Kreis ein regelmäfsiges Viereck zu beschreiben.

Lösung. Man ziehe zwei senkrechte Durchmesser AX und BY; dann ist $ABXY$ ein regelmäfsiges Viereck. Bedeutet nämlich O den Kreismittelpunkt, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke AOB, BOX, XOY und YOA, dafs $AB = BX = XY = YA$ und dafs $\sphericalangle A = B = X = Y$ ist.

214. Aufgabe. In einen Kreis ein regelmäfsiges Sechseck zu beschreiben.

Anleitung. Man ziehe drei Durchmesser, von denen je zwei aufeinander folgende einen Winkel von 60^0 bilden.

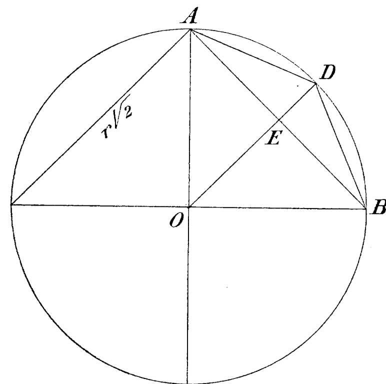


Fig. 113.

215. Aufgabe. In einen Kreis ein regelmäfsiges Achteck, Sechzehneck u. s. w. und ebenso ein regelmäfsiges Zwölfeck u. s. w. zu beschreiben. (Vgl. Aufgabe 87 f. S. 45 und 46.)

216. Aufgabe. Man beweise die Richtigkeit nachstehender Ausdrücke: 1. $s_4 = r\sqrt{2}$;
2. $s_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$;
3. $s_6 = r$; 4. $s_3 = r\sqrt{3}$.

Hierin bedeuten s_4, s_8 u. s. w. die Seiten des regelmäfsigen einbeschriebenen Vierecks, Achtecks u. s. w.

Anleitung. Dafs $s_4 = r\sqrt{2}$ ist, folgt unmittelbar aus dem Pythagoreischen Lehrsatz. Um s_8 zu berechnen, beachte man, dafs (Fig. 113) $AE = \frac{1}{2} r \sqrt{2}$, $OE = \sqrt{r^2 - \frac{1}{2} r^2} = \frac{1}{2} r \sqrt{2}$, $ED = r - \frac{1}{2} r \sqrt{2}$ ist.

217. Aufgabe. Man berechne die Seite s_{2n} des einbeschriebenen Vielecks aus der Seite s_n des einbeschriebenen Vielecks von halber Seitenzahl.

Lösung. Es ist (Fig. 116) $AB = s_n$, $AE = s_{2n}$. OD sei mit x bezeichnet. Dann ist $s^2_{2n} = \frac{s_n^2}{4} + r^2 + x^2 - 2rx$. Da aber $x^2 = r^2 - \frac{s_n^2}{4}$ und somit $x = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s_n^2}$ ist, so ergiebt sich nach einigen Umformungen die Formel:

$$s_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{s_n^2}{r^2}}}.$$

218. Aufgabe. Man zeichne das regelmäfsige umbeschriebene Vieleck aus dem regelmäfsigen einbeschriebenen Vieleck von gleicher Seitenzahl.

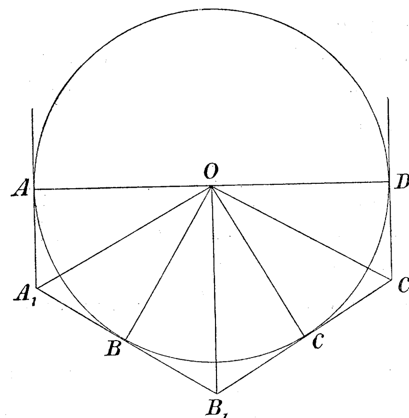


Fig. 114.

Lösung. Man ziehe die Tangenten in den Eckpunkten des einbeschriebenen regelmäfsigen Vielecks. Der Beweis der Richtigkeit gelingt durch kongruente Dreiecke.

Fig. 114 stellt das umbeschriebene regelmäfsige Sechseck dar.

219. Aufgabe. Man berechne die Seite S_n des umbeschriebenen regelmäfsigen Vielecks aus der Seite s_n des regelmäfsigen einbeschriebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl.

Lösung. In der Fig. 115 S. 90 ist $A_1AP \sim AOP$ und darum $AP : A_1A = OP : r$ oder $\frac{s_n}{2} : \frac{S_n}{2} = OP : r$ oder $s_n : S_n = OP : r$. Nun ist aber $OP = \frac{\sqrt{4r^2 - s_n^2}}{2}$ und darum $S_n = \frac{2r \cdot s_n}{\sqrt{4r^2 - s_n^2}}$.

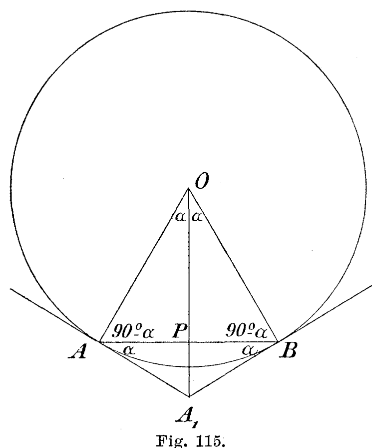


Fig. 115.

220. *Aufgabe.* Man berechne den Umfang des regelmäſsigen einbeschriebenen 96-Ecks.

Anleitung. Diese Berechnung, welche zuerst von Archimedes ausgeführt worden ist, geschieht mit Hülfe der in Aufgabe 217 angeführten Formel. Den Ausgangspunkt bildet $s_6 = r$.

221. *Aufgabe.* Man löse dieselbe Aufgabe für das umbeschriebene regelmäſsige 96-Eck.

§ 31. Berechnung der Zahl π.

Die vorigen Aufgaben liefern als Ergebnis:

Umfang des einbeschriebenen 96-Ecks ist $6{,}28206\, r$;

Umfang des umbeschriebenen 96-Ecks ist $6{,}28542\, r$.

Diese Zahlenwerte stimmen auf zwei Decimalstellen überein. Eine viel gröſsere Übereinstimmung wird eintreten, wenn man fortfährt, die Seitenzahl zu verdoppeln.

Geht man von einem andern regelmäſsigen Vieleck aus, z. B. vom Viereck, so erhält man bei hinreichender Verdoppelung der Seiten ebenfalls die angeführten Zahlen.

Hieraus lernen wir zweierlei:

1. Die Umfänge der einbeschriebenen und der entsprechenden umbeschriebenen Vielecke nähern sich bei hinreichender Verdoppelung der Seitenzahl einer und derselben Grenze.

2. Diese Grenze ist stets dieselbe, von welchem Vieleck man auch ausgehen mag.

Die Schulmathematik braucht sich auf nähere Erörterungen nicht einzulassen.

Zwischen den Umfängen der ein- und umbeschriebenen regelmäſsigen Vielecke liegt nun, wie uns die Anschauung lehrt, der Umfang des Kreises. Letzterer deckt sich hinreichend genau mit dem Umfang eines Vielecks, wenn die Seitenzahl sehr groſs geworden ist. Man hat für den Umfang eines Kreises, dessen Radius 1 ist, zur Abkürzung die Bezeichnung 2π gewählt; π selbst ist also der halbe Umfang oder auch, wie wir sehen werden, der Inhalt des Kreises, wenn $r = 1$ ist.

Um die Zahl π zu berechnen, genügt also das Archimedische Verfahren. Hier sollen, der bequemern Rechnung halber, noch zwei andere Methoden mitgeteilt werden.

1. Bedeutet a den Umfang des regelmäſsigen einbeschriebenen Vielecks, das n Seiten hat, c den Umfang des zugehörigen einbeschriebenen Vielecks mit doppelter Seitenzahl, und sind b und d die Umfänge der zugehörigen umbeschriebenen Vielecke, so ist (Fig. 116)

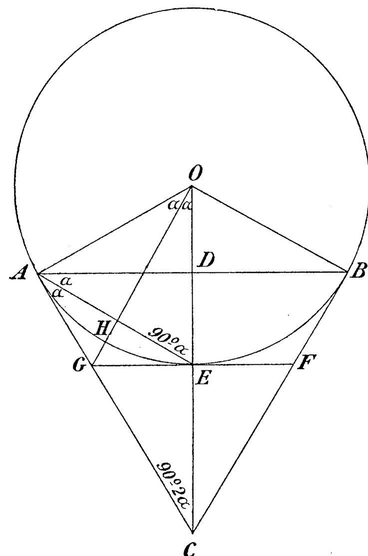


Fig. 116.

$$AD = \frac{a}{2n},\ AE = \frac{c}{2n},$$
$$AC = \frac{b}{2n},\ AG = GE = \frac{d}{4n}$$

und darum $AC : AD = b : a$.

Da $CGE \sim CAD$ ist, so folgt:

$$GC : GE = AC : AD,$$

oder da $GE = GA$,

$$GC : GA = AC : AD = b : a.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{GC + GA}{2AG} = \frac{a+b}{2a} \text{ oder } \frac{b}{d} = \frac{a+b}{2a}$$

und hieraus $d = \frac{2ab}{a+b}$ . . . . (1)

Ferner folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke GHA und EDA:

$AG : AH = AE : AD$, oder da $AH = \frac{1}{2} AE$ ist,

$$2AG : AE = AE : AD \text{ oder } d : c = c : a$$

und somit $c = \sqrt{ad}$ . . . . (2)

Zum Gebrauch der beiden Formeln diene folgendes:

Man berechne zuerst den Umfang eines beliebigen regelmäſsigen einbeschriebenen Vielecks, z. B. des Vierecks, dann das Gleiche für das zugehörige umbeschriebene Viereck. Formel (1) liefert dann den Umfang des umbeschriebenen Achtecks und Formel (2) den Umfang des einbeschriebenen Achtecks. Dieselben Formeln erlauben dann weiterhin die Umfänge der Vielecke zu bestimmen, die durch Verdoppelung der Seitenzahl aus dem Viereck entstehen.

2. Bedeuten A, C, B, D die Inhalte der Vielecke, deren Umfänge vorhin mit a, c, b, d bezeichnet wurden, so ist (Fig. 116):

$$I_{OAD} = \frac{A}{2n},\ I_{OAE} = \frac{C}{2n},\ I_{OAC} = \frac{B}{2n},\ I_{OAG} = \frac{D}{4n}.$$

Zunächst ist nun $B : C = OC : OE$. Diese Verhältnisgleichung folgt aus: $I_{OAC} = \frac{1}{2}\, OC \cdot AD$, $I_{OAE} = \frac{1}{2}\, OE \cdot AD$.

Es ist aber $OC : OE = OC : OA$,
und da $OAC \sim ADC$ ist,
$OC : OA = AC : AD$.

Da ferner $AC : AD = CG : GA$, so gewinnt man:

$B : C = CG : GA$ oder $(B + C) : 2C = AC : 2GA$.

Anderseits ist $B : D = AC : 2AG$ (zu begründen wie vorhin) und darum $B : D = (B + C) : 2C$

oder $$D = \frac{2BC}{B + C} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Weiterhin ergiebt sich:

$$A : C = OD : OE = OD : OA,$$
$$C : B = OE : OC = OA : OC.$$

Da aber $OD : OA = OA : OC$ ist (ähnliche Dreiecke), so folgt:

$$C = \sqrt{AB} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Aus (3) und (4) folgt $D = \frac{2AB}{A + C}$.

Beispiel. Geht man vom Sechseck aus, so ergiebt sich für den Umfang des Kreises mit dem Radius r:

Umfang des einbeschriebenen,	Umfang des umbeschriebenen Vielecks:
$3{,}0000000 \cdot 2r$	$3{,}4641016 \cdot 2r$
3,1058285	3,2153903
3,1326286	3,1596600
3,1393502	3,1460863
3,1410320	3,1427147
3,1414525	3,1418731
3,1415577	3,1416628
3,1415839	3,1416102
3,1415905	3,1415971
3,1415921	3,1415938
3,1415925	3,1415930
3,1415927	3,1415928.

Die Übereinstimmung bis auf sechs Decimalstellen tritt beim 12288-Eck ein. Die Rechnungen sind mit abgekürzter Multiplikation und Division ausgeführt.

Nach der zweiten Methode erhält man für den Inhalt des Kreises mit dem Radius r ausgehend vom Viereck;

Inhalt des einbeschriebenen,	Inhalt des umbeschriebenen Vielecks:
$2{,}0000000\, r^2$	$4{,}0000000\, r^2$
2,8284271	3,3137085
3,0614674	3,1825979
3,1214451	3,1517249
3,1365485	3,1441184
3,1403311	3,1422236
3,1412772	3,1417504
3,1415138	3,1416321
3,1415729	3,1416025
3,1415877	3,1415951
3,1415914	3,1415933
3,1415923	3,1415928
3,1415925	3,1415927
3,1415926	3,1415926.

Geschichtliche Anmerkung. Archimedes fand, dafs $\pi > 3\frac{10}{71}$ und $< 3\frac{1}{7}$ sei. $\pi = 3\frac{1}{7}$ heifst das Archimedische Verhältnis. Metius (um 1550) fand $\pi = \frac{355}{113}$. Bald nach ihm berechnete Ludolf van Ceulen π bis auf 35 Decimalstellen. Ihm zu Ehren nennt man π vielfach die Ludolfsche Zahl. In neuerer Zeit ist der Wert von π auf 700 Stellen mit Hülfe der Analysis bestimmt worden.

Über die Natur der Zahl π siehe „Trigonometrie“ S. 40.

§ 32. Umfang und Inhalt des Kreises.

Nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen fanden wir, dafs der Inhalt I und der Umfang u eines Kreises mit dem Radius r durch die Formeln gegeben werden:

$$I = r^2\pi, \quad u = 2r\pi.$$

Für π erhält man bis auf 20 Stellen genau den Wert:

$$\pi = 3{,}14159 \quad 26535 \quad 89793 \quad 23846\ldots$$

Man kann diese beiden Formeln aufeinander zurückführen. Zu diesem Zwecke beschreibe man um den Kreis ein regelmäfsiges Vieleck, nenne seinen Umfang u und seinen Inhalt I. Dann ist für das Vieleck $I = \frac{1}{2} ru$. Da die Formel für jedes Vieleck gilt, welches dem Kreise umbeschrieben ist, so gilt sie auch für dasjenige mit unendlich grofser Seitenzahl, also für den Kreis selbst.

Auch kann man die Kreisfläche in unendlich viele unendlich kleine Sektoren zerlegen, jeden Sektor als Dreieck und zwar mit der Höhe r auffassen,

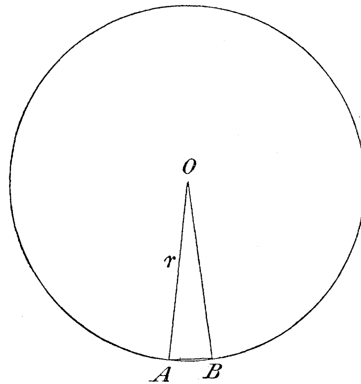


Fig. 117.

wodurch der Inhalt des kleinen Sektors $\frac{1}{2} r \cdot AB$ wird. Fig. 117 bringt dieses Verhalten zur Anschauung. Bildet man die Summe der Sektoren, so wird wie oben $I = \frac{1}{2} r u$. Vgl. „Stereometrie" S. 13.

222. Aufgabe. Man zeige, dafs der Inhalt eines Kreissektors $r^2 \pi \cdot \frac{\alpha}{360}$ ist, wenn der Centriwinkel gleich α ist.

Anleitung. Ist der Centriwinkel 1^0, so ist der Inhalt $\frac{r^2 \pi}{360}$.

223. Aufgabe. Man bestimme Segmente, deren Inhalt ohne Trigonometrie mit Hülfe von Quadratwurzeln berechnet werden kann.

Anleitung. Der Inhalt eines Segments ist gleich dem Kreissektor vermindert um das Dreieck, dessen Seiten die beiden Radien und die zum Sektor zugehörige Sehne sind. Die Inhalte beider lassen sich aber nur dann in der verlangten Weise bestimmen, wenn der Centriwinkel einer von den Winkeln ist, die nach Aufgabe 86 hergestellt werden können. Vgl. übrigens § 34.

224. Aufgabe. Einen Kreis zu zeichnen, der gleich der Summe oder Differenz zweier gegebener Kreise ist.

Anleitung. Der Ausdruck $x^2 \pi = (r^2 \pm \rho^2) \pi$ ist zu zeichnen. (Aufgabe 198.)

225. Aufgabe. Durch koncentrische Kreise einen gegebenen Kreis in drei gleiche Teile zu teilen.

Anleitung. Sind x und y die Radien der gesuchten Kreise, so kommt es auf die Zeichnung von $\frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und $\frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ an. (Aufgaben 188, 199.)

226. Aufgabe. Zwei gleiche Kreise gehen gegenseitig durch ihre Mittelpunkte. Man berechne das beiden gemeinsame Stück.

227. Aufgabe. Drei gleiche Kreise berühren sich von aufsen; es ist die Gröfse des zwischen ihnen liegenden Stückes zu berechnen.

Anmerkung. Auf die Beziehungen der regelmäfsigen Vielecke zum Kreise kommen wir später § 34 zurück. Einige der dort gegebenen Darlegungen können schon an dieser Stelle erwähnt werden.

Lehraufgabe der Obersekunda.

§ 33. Von den Verhältnisgleichungen am Dreieck und Kreise.

228. Aufgabe. Ein Rechteck in ein Quadrat gleichen Inhalts zu verwandeln.

Erste Lösung. Die Seiten des Rechtecks seien a und b. Ich verlängere $BD = a$ um $DC = b$ (Fig. 118) und beschreibe über BC einen Halbkreis. Die auf BC in D errichtete Senkrechte schneidet den Halbkreis in einem solchen Punkte A, dafs DA die Seite des verlangten Quadrates ist.

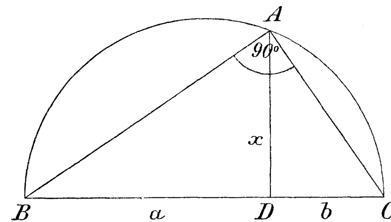


Fig. 118.

Beweis. Sei $DA = x$, so ist

$$AB^2 = a^2 + x^2,$$

$$AC^2 = b^2 + x^2 \text{ (Lehrsatz 52 S. 76)}$$

und darum $AB^2 + AC^2 = a^2 + b^2 + 2x^2$. Da aber $AB^2 + AC^2 = BC^2 = (a + b)^2$ ist, so folgt $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2x^2$ oder

$$x^2 = a \cdot b.$$

Zweite Lösung. In der beigezeichneten Fig. 119 ist $BC = a$, $DC = b$ (umgekehrt wenn $b > a$). Über BC ist ein Halbkreis beschrieben und auf BC in D die Senkrechte DA errichtet. $AC = x$ ist die Seite des Quadrates.

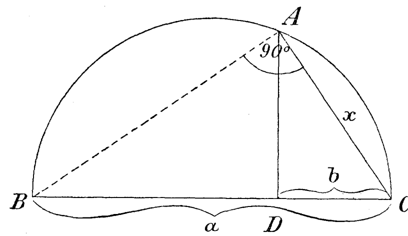


Fig. 119.

Beweis. Es ist $AC^2 = x^2 = DC^2 + AD^2$. AD^2 ist aber nach der ersten Lösung gleich $BD \cdot DC = (a - b)\, b$. Darum wird $x^2 = b^2 + (a - b)\, b = a \cdot b$.

Das geometrische Mittel x zu zwei gegebenen Strecken a und b ist diejenige Strecke, welche der Gleichung $x^2 = a \cdot b$ oder $a : x = x : b$ genügt.

Die vorstehenden Lösungen führen zu dem

63. Lehrsatz. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenusenhöhe das geometrische Mittel zu den Abschnitten auf der Hypotenuse, und jede Kathete ist das geometrische Mittel zwischen der ganzen Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt derselben.

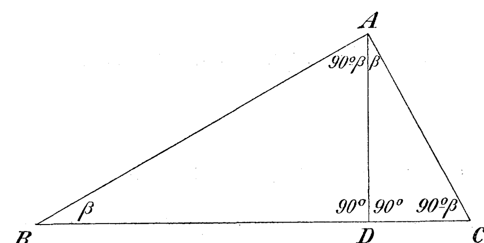


Fig. 120.

Beweis. Die vorige Aufgabe enthält den Beweis. Einen andern liefert Aufgabe 201 S. 85. Danach ist $ABC \sim DBA \sim DAC$ (Fig. 120).

Aus der Ähnlichkeit der beiden letztern Dreiecke folgt:

$$BD : AD = AD : CD.$$

Aus $ABC \sim DBA$ gewinnt man: $BC : AB = AB : BD$, und aus $ABC \sim DAC$: $\quad BC : AC = AC : CD.$

Eine Strecke AB nach innen und aufsen in dem Verhältnis $m : n$ teilen heifst, zwischen A und B und auf der Verlängerung von AB einen Punkt D bestimmen, so dafs sich DA zu DB verhält wie m zu n.

64. Lehrsatz. Die Halbierer eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die Gegenseite nach innen und aufsen so, dafs sich die Teilstücke verhalten wie die anliegenden Dreiecksseiten.

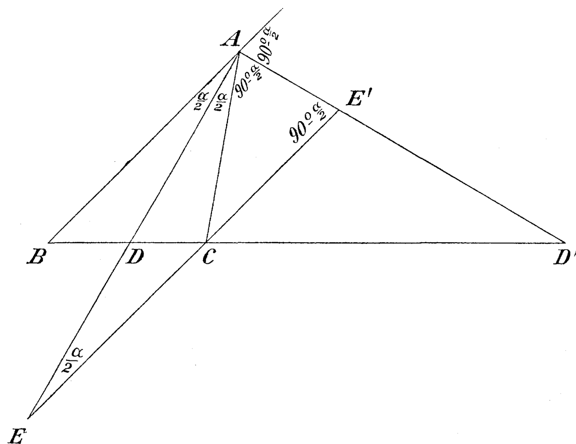


Fig. 121.

Beweis. Zieht man durch C zu AB (Fig. 121) eine Parallele, welche die Halbierer in E und E' schneidet, und bezeichnet man nach der Methode der Winkelberechnung die Winkel, wie in der Figur geschehen ist, so folgt

$$EC = AC; \quad ABD \sim ECD$$

und darum $\quad DB : DC = AB : EC = AB : AC.$

Ebenso ist $CA = CE'$; $D'B : D'C = AB : AC.$

65. Lehrsatz. Zieht man von einer Dreiecksecke Linien zu den Punkten, welche die Gegenseite nach innen und aufsen in dem Verhältnis der anliegenden Dreiecksseiten teilen, so halbieren diese Linien den Winkel an der Ecke und seinen Nebenwinkel.

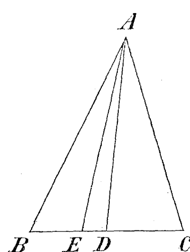


Fig. 122.

Beweis. In der Fig. 122 ist $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Angenommen, nicht AD, sondern AE halbiere den Winkel A. Dann ist (Lehrsatz 64) $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$. Da aber auch $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ ist, so folgt $\frac{EB}{EC} = \frac{DB}{DC}$ oder $\frac{EB}{DB} = \frac{EC}{DC}$. Dies ist nicht möglich, da der eine von diesen Brüchen echt, der andere unecht ist.

Für den äufsern Teilpunkt wendet man ein ähnliches Verfahren an. Vgl. unten S. 110.

66. Lehrsatz. Zieht man durch einen Punkt Gerade, welche einen Kreis schneiden, so ist das Rechteck gebildet aus den Abständen des Punktes von den Kreisschnittpunkten von unveränderlicher Gröfse. (Potenz am Kreise, Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen Kreis.)

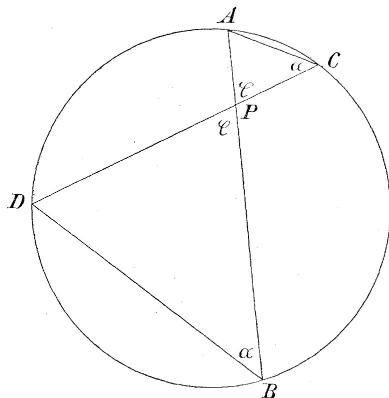


Fig. 123.

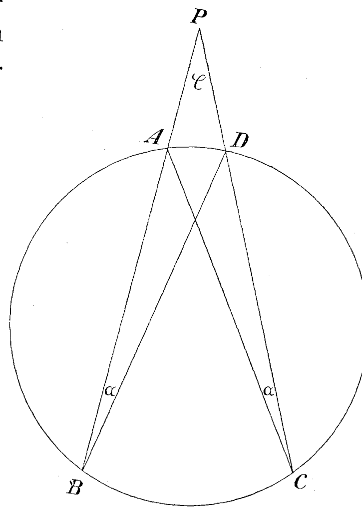


Fig. 124.

Beweis. Es ist (vgl. Aufgabe 196 S. 84) $PCA \sim PBD$ (Fig. 123 und 124) und darum $PA : PC = PD : PB$ oder

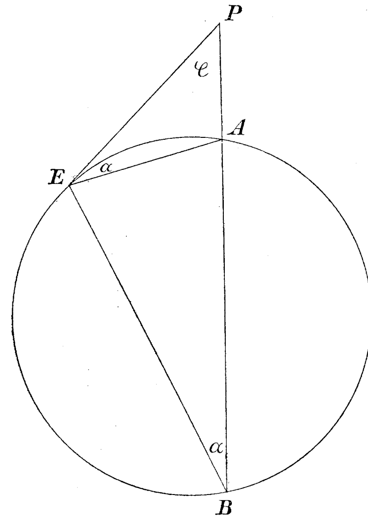


Fig. 125.

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Dreht man PC, bis PC den Kreis in E berührt (Fig. 125), so ist auch $PE^2 = PA \cdot PB$.

Hierfür soll auch ein besonderer Beweis gegeben werden.

Es ist $\triangle\, PBE \sim PEA$ (Lehrsatz 39 S. 64) und darum

$$PB : PE = PE : PA$$

oder $$PE^2 = PA \cdot PB.$$

229. Aufgabe. Zu zwei Strecken a und b das geometrische Mittel zu finden.

Vorbemerkung. Die Aufgabe ist gleichbedeutend mit Aufg. 228 S. 95. Die daselbst gegebenen Lösungen gehören darum auch hierher. Lehrsatz 66 liefert die

dritte Lösung. Auf $PB = a$ trage ich $PA = b$ ab. Die Tangente von P an einen beliebigen, durch AB gelegten Kreis löst nach Lehrsatz 66 die Aufgabe.

230. Aufgabe. Ein Rechteck mit den Seiten b und c soll in ein anderes verwandelt werden, dessen eine Seite die vorgeschriebene Gröfse a haben soll.

Vorbemerkung. Nennt man die unbekannte Seite x, so soll sein $a \cdot x = b \cdot c$ oder $a : b = c : x$. In der letztern Schreibweise lautet die Aufgabe: Zu drei Gliedern einer Verhältnisgleichung das vierte zu finden.

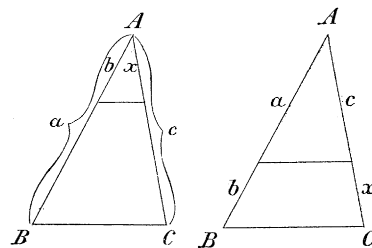


Fig. 126.

Erste Lösung. Aufg. 199 S. 85.

Zweite Lösung. Nach Lehrsatz 54 S. 81 erkennt man die Lösungen aus beistehender Fig. 126.

Dritte Lösung. Man zeichne nach Fig. 123 bezw. 124 $PC = b$, $PD = c$, $PB = a$. Dann ist PA die Lösung.

231. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus β, γ, a.

Lösung. Ich zeichne ein Dreieck BFE (Fig. 127), in welchem $\measuredangle\, B = \beta$, $\measuredangle\, F = \gamma$ ist. Dann verlängere ich BF bis C, so dafs $BC = a$ wird. Die Parallele zu FE durch C liefert A.

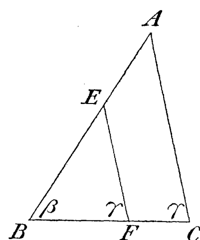


Fig. 127.

Der ***Beweis*** folgt aus ähnlichen Dreiecken.

Besprechung dieser Lösung. Die angewandte Methode heißt Methode der Ähnlichkeit. Sie besteht darin, daß man ein Dreieck zeichnet, welches dem verlangten ähnlich ist und darin eine Strecke (Seite, Höhe u. s. w.) der gegebenen gleich macht.

Die Methode der Ähnlichkeit kann man stets anwenden, wenn zwei Winkel des Dreiecks gegeben sind.

232. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen, von dem zwei Winkel und irgend eine Strecke (h_a, t_a u. s. w.) gegeben sind. (Methode der Ähnlichkeit.)

233. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben ist β, γ, $h_a + t_b$. („100 Aufgaben" S. 39.)

234. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus $a, b : c = m : n, \alpha$.

Lösung. Ich zeichne DBF, in welchem $\measuredangle D = \alpha$, $DF = m$ und $DB = n$ ist. Dann verlängere ich BF über F hinaus bis zum Punkte C, so daß $BC = a$ wird. Eine Parallele durch C zu DF schneidet die Verlängerung von BD in A.

235. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus $a : b = m : n$, $b : c = n : p$, a.

Anleitung. Man zeichne BDF aus m, n, p. Dasselbe ist dem gesuchten ähnlich.

236. Aufgabe. Ein Dreieck aus seinen drei Höhen zu zeichnen.

Erste Lösung. Siehe „100 Aufgaben" S. 84.

Zweite Lösung (Anleitung). Man zeichne zuerst ein Dreieck aus h_a, h_b, h_c, ziehe darin die Höhen x, y, z und zeichne aus diesen ein zweites Dreieck. Dasselbe ist dem gesuchten ähnlich.

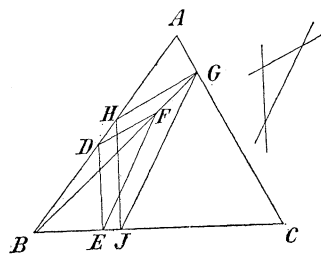


Fig. 128.

237. Aufgabe. In ein Dreieck ein anderes zu beschreiben, so daß die Seiten gegebenen Linien parallel werden.

Lösung. Durch den beliebigen Punkt D auf der Seite AB (Fig. 128) ziehe ich eine Parallele zu der einen gegebenen Geraden, welche BC in E schneiden möge. Sodann ziehe ich durch D und E

zu den beiden andern Geraden Parallele. Ihren Schnittpunkt F verbinde ich mit B und nenne den Punkt, in welchem die Verbindungslinie AC schneidet, G. Durch G ziehe ich $GH \parallel DF$ und $GJ \parallel EF$. Das Dreieck GHJ genügt der Aufgabe. (Auf welcher Seite man D annimmt, ist gleichgültig.)

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dafs $HJ \parallel DE$ ist. BFG schlägt die Ähnlichkeitsbrücke. Es ist

einerseits: $BF : BG = BD : BH$,

anderseits: $BF : BG = BE : BJ$,

folglich $BD : BH = BE : BJ$, $DE \parallel HJ$ nach Lehrsatz 55 S. 81.

238. Aufgabe. Ein Quadrat in ein Dreieck, einen Kreissektor, ein Kreissegment zu beschreiben.

239. Aufgabe. In ein Dreieck einen Rhombus zu beschreiben, der einen Winkel mit dem Dreieck gemeinsam hat.

240. Aufgabe. Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

Lösung. Die Verbindungslinie AB der gegebenen Punkte (Fig. 129) schneide die gegebene Gerade in C. Man lege nun durch AB einen beliebigen Kreis und ziehe von C an denselben eine Tangente. Darauf mache man CD gleich der Tangente und lege durch A, B, D einen Kreis. Derselbe löst die Aufgabe.

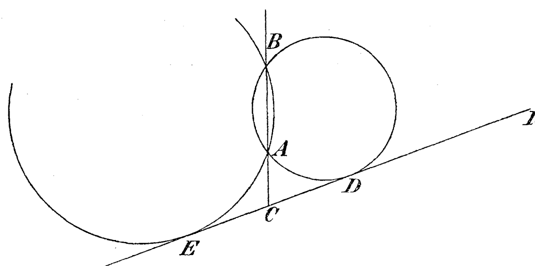


Fig. 129.

Beweis. Angenommen der Kreis berühre die Gerade nicht. Dann müfste er dieselben in einem zweiten Punkte D' schneiden. Es wäre dann $CA \cdot CB = CD \cdot CD'$. Da aber $CA \cdot CB = CD^2$ ist, so müfste $CD^2 = CD \cdot CD'$ oder $CD = CD'$ sein, was unmöglich ist.

241. Aufgabe. Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt.

242. Aufgabe. Das Dreieck ABC durch eine Linie von A aus in Dreiecke zu teilen, die sich wie $m : n$ verhalten.

Anleitung. Die gesuchten Dreiecke haben gleiche Höhen. Ihre Grundlinien verhalten sich demnach wie $m : n$.

Man lege durch B eine Linie, auf der man nacheinander m und n abträgt, verbinde den letzten Punkt mit C und ziehe eine geeignete Parallele.

243. Aufgabe. Man trage auf einer Geraden AX die Strecken m, n, p ab und ziehe durch die Endpunkte Parallele. Man zeige, dafs jede durch A gehende Gerade durch dieselben in Stücke geteilt wird, die im Verhältnis von $m : n : p$ stehen.

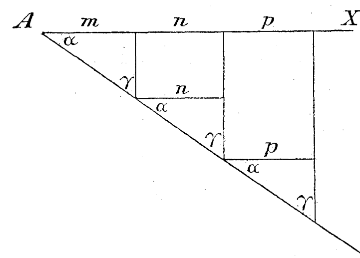


Fig. 130.

Anleitung. Man ziehe geeignete Parallele (Fig. 130) und beweise die Gleichheit der Verhältnisse durch ähnliche Dreiecke.

Diese Aufgabe ist die Verallgemeinerung der Aufgabe: Eine Strecke in gleiche Teile zu teilen.

244. Aufgabe. Man löse die Verallgemeinerung der Aufg. 242.

245. Aufgabe. Es ist in einem Dreieck $\beta = 2\gamma$; man zeige, dafs 1) $p - q = c$; 2) $q = \frac{1}{2}(a - c)$; 3) $p = \frac{1}{2}(a + c)$; 4) $\sphericalangle (h_a, m_a) = \frac{1}{2}\gamma$ ist. (Methode der Winkelberechnung.)

Aufgaben. Man zeichne ein Dreieck, in welchem $\beta = 2\gamma$ sein soll, wenn gegeben ist:

246. b, c; ***247.*** h_a, m_a; ***248.*** $h_a, p - q$; ***249.*** $a + c, h_a$; ***250.*** p, q.

Erklärung. Eine Strecke ist nach dem goldenen Schnitte geteilt, wenn sie sich zu dem gröfsern Teilstücke verhält wie letzteres zu dem kleinern.

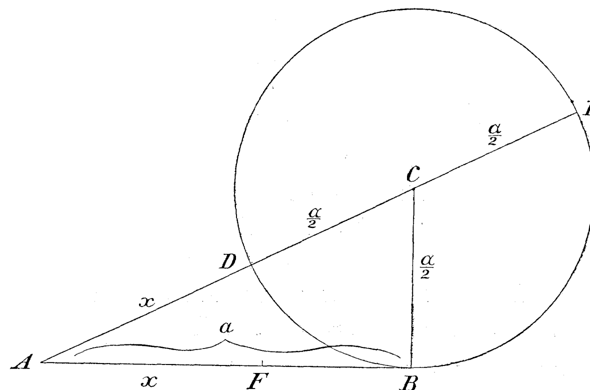


Fig. 131.

251. Aufgabe. Eine Strecke stetig, d. h. nach dem goldenen Schnitt zu teilen.

Lösung. Auf der Strecke $AB = a$ (Fig. 131) errichte ich in B die Senkrechte $BC = \frac{a}{2}$ und

beschreibe um C mit CB einen Kreis. Die Sekante AC möge denselben in D und E schneiden. Der Punkt F auf AB, für den $AF = AD$ ist, teilt AB stetig.

Beweis. Setzt man $AF = AD = x$, so ist $x\,(a + x) = a^2$ oder $x^2 + ax = a^2$ oder $x^2 = a\,(a - x)$ oder $a : x = x : (a - x)$.

67. Lehrsatz. Die Seite des regelmäſsigen Zehnecks im Kreise ist gleich dem gröſsern Stück des stetig geteilten Radius.

Fig. 132.

Beweis. Es sei (Fig. 132) $\measuredangle\, O = 36^0$, $OA = OB = r$. AB nenne ich x. Halbiere ich nun $\measuredangle\, A = 72^0$, so ergiebt die Methode der Winkelberechnung $AC = OC = x$. Nach Lehrsatz 64 ist nun

$$AB : AO = BC : OC$$

oder $\quad x : r = (r - x) : x$

oder $\quad r : x = x : (r - x)$.

252. Aufgabe. Einen Winkel von 36^0 zu zeichnen.

Lösung. Den Radius OB eines beliebigen Kreises (Fig. 133) teile ich stetig durch D. Sei $OD = x$ das gröſsere Stück. Ich trage dasselbe von B aus als Sehne ein und verbinde den Endpunkt A mit O. $\measuredangle\, O$ ist gleich 36^0.

Fig. 133.

Beweis. Verbindet man noch A mit D, so ist (Satz 65 S. 97) wegen

$$r : x = x : (r - x)$$

oder $AO : AB = OD : BD$

AD Halbierungslinie des $\measuredangle\, A$.

Aus $r : x = x : (r - x)$ folgt ferner $OB : AB = AB : BD$. Es ist somit $BAO \sim DBA$ (1. Krit.). Da nun BAO gleichschenklig ist, so ist auch DBA gleichschenklig.

Nenne ich nun $\measuredangle\, OBA\ 2\alpha$, so ist auch $\measuredangle\, BDA = 2\alpha$. Die Winkel an A und O sind ferner mit α zu bezeichnen. Es ist dann $\alpha = 36^0$, weil

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha = 180^0.$$

§ 34. Beziehung der regelmäſsigen Vielecke zum Kreise.

Nach den Aufgaben 86 (S. 45) und 252 sind wir im stande, Winkel von 90°, 60°, 36° mit Hülfe von Zirkel und Lineal zu zeichnen. Selbstverständlich können wir auch solche Winkel herstellen, die durch Addition und Subtraktion aus jenen entstehen. Von diesen ist uns von besonderem Interesse der Winkel $90^0 - 36^0 = 24^0$, da er wie die vorhin genannten ohne Rest in 360^0 enthalten ist.

Durch Vervielfachen und wiederholte Teilung durch 2 lassen sich weiterhin neue Winkel zeichnen.

Bis zu Anfang dieses Jahrhunderts kannte man keine weitern Winkel, die mit Zirkel und Lineal hergestellt werden konnten. Im Jahre 1801 lehrte Gauſs (Disquisitiones arithmeticae) einen Winkel von $\frac{360^0}{17}$ zu zeichnen, und er brachte auch den Beweis, daſs in gleicher Weise jeder Winkel zu zeichnen ist, wenn er $\frac{360}{2^n + 1}$ Grad hat. Hierbei muſs aber $2^n + 1$ eine Primzahl sein.

$2^n + 1$ ist, wenn n einen ungeraden Teiler α enthält, also die Form $2^{\alpha\beta} + 1$ hat, immer durch $2^\beta + 1$ teilbar. Also muſs n Potenz von 2 sein. Allein diese Bedingung ist nur notwendig, nicht genügend. $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, $2^{2^4} + 1 = 65\,537$ sind Primzahlen, $2^{32} + 1$ ist teilbar durch 641, wie Euler gezeigt hat im Gegensatz zu einer Behauptung Fermats.

Die Zeichnung vorgenannter Winkel gestattet, folgende Gruppen regelmäſsiger Vielecke herzustellen:

1. Das Viereck, Achteck u. s. w.
2. Das Sechseck, Dreieck u. s. w.
3. Das Zehneck, Fünfeck u. s. w.
4. Das Fünfzehneck, Dreiſsigeck u. s. w. (durch Zeichnung eines Winkels von 24^0).

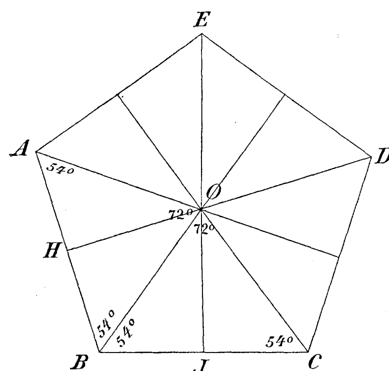


Fig. 134.

Wir werden nun zeigen, daſs man um und in jedes regelmäſsige Vieleck einen Kreis beschreiben kann.

Zum Nachweise dürfen wir, wie aus der nachstehenden Beweisführung sich ergiebt, ein beliebiges, regelmäſsiges Vieleck annehmen. Es sei das Fünfeck $ABCDE$ (Fig. 134) gewählt. Ich halbiere $\measuredangle A$ und $\measuredangle B$ und ver-

binde den Schnittpunkt O mit den Ecken. Dann ist im Dreieck $AOB \measuredangle A = B = 54^0$ und darum $OA = OB$. Ferner ist Dreieck $AOB \cong BOC$ (1. Krit.) und somit $OA = OB = OC$.

Auch folgt aus der Kongruenz, dafs $\measuredangle OCB = 54^0$, und unter Verwendung dieses Umstandes, dafs überhaupt alle fünf Dreiecke, die man durch Verbinden von O mit den Eckpunkten erhält, kongruent sind. Somit hat O von den Eckpunkten gleiche Entfernung. O ist Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises.

Fällt man ferner von O auf die Seiten die Senkrechten, so läfst sich durch kongruente Dreiecke nachweisen, dafs dieselben unter sich gleich sind. Punkt O ist demnach auch Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, da er von den Seiten gleichen Abstand hat.

Mit der Zeichnung regelmäfsiger Vielecke ist zugleich die Aufgabe gelöst, die Kreisperipherie in gleiche Teile zu teilen. Dies folgt unmittelbar aus der Zeichnung, da zu gleichen Centriwinkeln auch gleiche Bogen gehören.

Die Aufgaben: Winkel von vorgeschriebener Gradzahl zu zeichnen, regelmäfsige Vielecke herzustellen, die Peripherie des Kreises in gleiche Teile zu teilen, sind also ganz verwandte Aufgaben. Sie bilden den Ausgangspunkt für sehr wichtige Untersuchungen in der Zahlentheorie.

253. Aufgabe. Man beweise, dafs regelmäfsige Vielecke mit gerader Seitenzahl einen Mittelpunkt besitzen. (Vgl. Übungslehrsatz 5 und 6 S. 43.)

§ 35. Vermischte Aufgaben.

254. Aufgabe. Man zeige die Richtigkeit der Formel

$$I = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}.$$

Anleitung. Man zeichne Dreieck ADC, worin AD Durchmesser des umbeschriebenen Kreises ist, und ziehe die Höhe $AE = h_a$. Dann ist $ADC \sim ABE$ und darum $c : 2r = h_a : b$. Hierin ersetze man h_a aus der Formel $2I = a \cdot h_a$.

15. Übungslehrsatz. Stimmen zwei Dreiecke in einem Winkel überein, so verhalten sich ihre Inhalte wie die Produkte aus den Seiten, welche den Winkel bilden.

Anleitung. Man ziehe in beiden Dreiecken solche Höhen, dafs rechtwinklige Dreiecke entstehen, in denen der gleiche Winkel

vorkommt. Dann bilde man den Ausdruck für den Inhalt und beachte, dafs ähnliche Dreiecke vorliegen.

255. Aufgabe. Es sind folgende algebraische Ausdrücke zu zeichnen: 1) $x^2 = ab + cd$; 2) $x = \frac{a^3}{b^2}$; 3) $x = \frac{a^5}{b^4}$; 4) $x^2 = \frac{a^5}{b^3}$; 5) $x = \frac{a^4 + m a^3 b + n a^2 b^2}{a^3 + p a^2 b + q b^3}$; 6) $x = \frac{a^2 + n\sqrt{a^4 + d^4}}{e + p\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Hierbei sind a, b, c, d, e Strecken, m, n, p, q, Zahlen.

Anleitung zu 1. Man bestimme zu ab und cd je das geometrische Mittel u und v. Dann ist $x^2 = u^2 + v^2$ und nach dem Pythagoreischen Lehrsatz zu zeichnen. Ein anderes, allgemeineres Verfahren besteht darin, dafs man $y = \frac{ab}{c}$ bestimmt. Dann wird $x^2 = yc + cd = c(y + d)$. Die Gröfse $y + d$ läfst sich zeichnen; sie sei gleich z. Dann wird $x^2 = c \cdot z$.

Anleitung zu 2. Man zeichne $y = \frac{a^2}{b}$. Dann wird $x = \frac{ay}{b}$ und kann ebenfalls gefunden werden.

Anleitung zu 5. Man setze $a^3 + pa^2b = a^2(a + pb)$. Es ist $a + pb$ herzustellen und sei u benannt. Der Nenner bekommt dann die Form: $a^2u + qb^3$. Nun zeichne man $v = \frac{a^2 u}{b^2}$. Dann wird der Nenner gleich $vb^2 + qb^3 = b^2(v + qb) = b^2 \cdot w$.

256. Aufgabe. Man zeichne $x = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{5}}}}$. Welche Gleichung 16. Grades ist also geometrisch mit Zirkel und Lineal lösbar?

257. Aufgabe. Man gebe die geometrische Lösung der Gleichungen: $x^2 + ax = b^2$; $2x^2 + 3(a - x)^2 = m^2$. („100 Aufgaben“ S. 47.)

258. Aufgabe. Man zeichne von den Strecken a, b das geometrische, harmonische und arithmetische Mittel.

Anmerkung. Das harmonische Mittel ist $\frac{2ab}{a + b}$, das arithmetische Mittel $\frac{a + b}{2}$.

Aufgaben. Ein Dreieck zu zeichnen aus: ***259.*** α, β, I; ***260.*** a, h_a, I; ***261.*** a, h_b, I; ***262.*** a, ρ, ρ_a; ***263.*** a, ρ, I.

264. Aufgabe. Ein Dreieck in ein gleichschenkliges zu verwandeln. Die Grundlinie soll bleiben.

265. Aufgabe (unbestimmt). Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, dessen Grundlinie eine vorgeschriebene Gröfse haben soll.

266. Aufgabe. Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln mit Beibehaltung des Winkels A, so dafs die Grundlinie die Gröfse d erhält.

267. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus a, α, $bc = m^2$.

Anleitung. Man kennt den Inhalt des gesuchten Dreiecks nach Übungslehrsatz 15.

268. Aufgabe. Eine Strecke im Verhältnis von $m^2 : n^2$ zu teilen.

Anleitung. Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten m und n sind, fälle die Höhe und nenne die Teile der Hypotenuse x und y. Darauf teile man die Strecke in dem Verhältnis $x : y$. Vgl. Lehrsatz 63 S. 96.

269. Aufgabe. Durch den Punkt P ziehe man eine Linie, welche von dem Winkel XAY ein Dreieck ABC von gegebenem Umfange abschneidet.

Anleitung. Man zeichne den einbeschriebenen Kreis.

270. Aufgabe. Dieselbe Aufgabe soll gelöst werden unter der Abänderung, dafs das Dreieck den gegebenen Inhalt q^2 habe. („100 Aufgaben" S. 90.)

Aufgaben. Ein Dreieck zu zeichnen aus: ***271.*** $a + b, a + c, \alpha$; ***272.*** α, β, $t_a + t_b$; ***273.*** α, β, $h_a + h_b$; ***274.*** α, β, $h_a - h_b$. (Ähnlichkeitsmethode. „100 Aufgaben" S. 41.)

275. Aufgabe. Man leite die Formel ab: $2b^2 + 2c^2 = 4t_a^2 + a^2$.

Anleitung. Man ziehe h_a und nenne x das Stück zwischen den Endpunkten von t_a und h_a. Dann ist $x^2 + h^2$ gleich t_a^2.

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + h_a^2 = b^2; \quad \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + h_a^2 = c^2.$$

Weitere Ableitungen siehe „100 Aufgaben" S. 12.

276. Aufgabe. Auf der Strecke $BC = a$ einen Punkt D zu bestimmen, so dafs $DB^2 + DC^2 = m^2$ wird.

Anleitung. Die algebraische Lösung ergiebt zwei Punkte, die der Aufgabe genügen. Nennt man sie D und D_1, so ist $BD = CD_1$. („100 Aufgaben" S. 50.)

7. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summe der Quadrate ihrer Entfernungen von den Endpunkten der Strecke a gleich m^2 ist, ist der Kreis über DD_1 als Durchmesser, wenn für D und D_1 ebenfalls die Summe der Quadrate gleich m^2 ist.

Beweis. D und D_1 sind nach der vorigen Aufgabe bestimmt und über DD_1 als Durchmesser ein Kreis beschrieben.

Es ist, wenn man den Radius des Kreises r nennt und BC mit a bezeichnet, $PB^2 + PC^2 = 2r^2 + \frac{a^2}{2}$. (Aufgabe 275.)

Ferner ist $BD^2 + DC^2 = \left(\frac{a}{2} - r\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + r\right)^2 = 2r^2 + \frac{a^2}{2}$. Folglich hat man $PB^2 + PC^2 = BD^2 + DC^2 = m^2$. Für einen Punkt P_1 innerhalb oder aufserhalb des Kreises kann nicht $P_1B^2 + P_1C^2 = m^2$ sein; denn aus $P_1B^2 + P_1C^2 = 2P_1O^2 + \frac{a^2}{2}$, wenn O Mittelpunkt des Kreises ist, würde folgen $P_1O = PO$, was unmöglich ist.

Aufgaben. Ein Dreieck zu zeichnen aus: ***277.*** $b^2 + c^2$, a, h_a; ***278.*** $b^2 + c^2$, a, t_a; ***279.*** a, $b^2 + c^2$, $b^2 - c^2$; ***280.*** α, β, $b^2 + c^2$.

281. Aufgabe. In dem Dreieck ABC ist $\beta = 2\gamma$; man zeige, dafs $b^2 = c(a + c)$ ist.

Anleitung. BD halbiere β, AD sei x genannt; dann ist $CD = b - x$, $BD = b - x$ und $ADB \sim ABC$. (Methode der Winkelberechnung.)

Es ergiebt sich: $\frac{x}{b-x} = \frac{c}{a}$ (Winkelhalbierer); $\frac{x}{c} = \frac{c}{b}$. x wird entfernt.

282. Aufgabe. In dem Dreieck ABC ist $\beta = 3\gamma$; man zeige, dafs $\frac{b+c}{c} = \frac{a^2}{(b-c)^2}$ ist.

Anleitung. Nach der Fig. 135 ist:

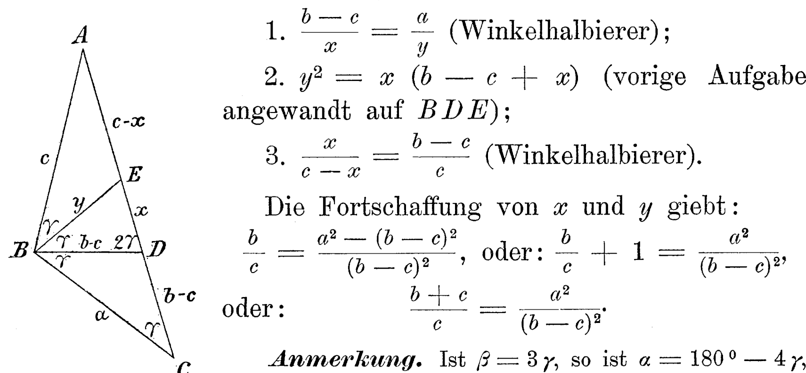


Fig. 135.

1. $\frac{b-c}{x} = \frac{a}{y}$ (Winkelhalbierer);

2. $y^2 = x(b - c + x)$ (vorige Aufgabe angewandt auf BDE);

3. $\frac{x}{c-x} = \frac{b-c}{c}$ (Winkelhalbierer).

Die Fortschaffung von x und y giebt:

$$\frac{b}{c} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{(b-c)^2}, \text{ oder: } \frac{b}{c} + 1 = \frac{a^2}{(b-c)^2},$$

oder:
$$\frac{b+c}{c} = \frac{a^2}{(b-c)^2}.$$

Anmerkung. Ist $\beta = 3\gamma$, so ist $\alpha = 180^\circ - 4\gamma$, also wenn $a = b$ ist, $180^\circ - 4\gamma = 3\gamma$, $\gamma = \frac{180^\circ}{7}$. Daher hängt die Siebenteilung des Kreises ab von der Lösung der Gleichung

$$\frac{a+c}{c} = \frac{a^2}{(a-c)^2}, \; (a^2 - c^2)(a - c) = a^2 c,$$

oder: $(x^2 - 1)(x - 1) = x^2$; $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$.

Ist $\beta = 3\gamma$ und $a = c$, so ist $180^\circ - 4\gamma = \gamma$, $\gamma = 36^\circ$, also $\frac{b+a}{a} = \frac{a^2}{(b-a)^2}$, woraus eine bekannte Gleichung folgt.

283. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen, worin $\beta = 3\gamma$ ist und von dem b und c gegeben sind.

Anleitung. Man zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie gleich $b - c$ und dessen Scheitelseiten gleich c sind. Das Weitere ergiebt Fig. 135.

284. Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein Rechteck von gegebenem Umfange (Inhalte) zu beschreiben.

285. Aufgabe. Ein Kreis soll zwei Seiten eines Dreiecks berühren und die dritte unter der Sehne $2m$ schneiden.

Heifst der Radius x, so drücke man die Inhalte der drei Dreiecke aus, welche im Mittelpunkt des gesuchten Kreises zusammentreffen. Soll ein Kreis die drei Seiten unter gegebenen Sehnen schneiden, so wird erhalten: $a\sqrt{x^2 - m^2} + b\sqrt{x^2 - n^2} + c\sqrt{x^2 - p^2} = 2I;$

$$x^2 - m^2 = z^2; \quad x^2 - n^2 = u^2; \quad x^2 - p^2 = v^2,$$

also: $z^2 + m^2 = u^2 + n^2 = v^2 + p^2$, mithin v^2 und u^2 durch z^2 darstellbar. Dazu linear $az + bu + cv = 2I$. Diese allgemeine Aufgabe ist in vielen besondern Fällen leicht lösbar.

286. Aufgabe. a, t_a, $b = 2c$ (rechnerisch zu lösen).

287. Aufgabe. Ein Rechteck zu zeichnen, dessen Inhalt und Umfang bekannt ist.

16. Übungssatz. In jedem Kreisviereck ist die Summe der Produkte der Gegenseiten gleich dem Produkte der Diagonalen (Ptolemäischer Satz).

Anleitung. Man drehe (Fig. 123) den Winkel α bei C um den Scheitelpunkt C, bis CD in die Lage CB gelangt. Der andere Schenkel teilt dann AB in zwei Stücke, welche bestimmt werden können.

288. Aufgabe. $x + y + z = a$, $xy = b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$. Geometrisch: Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, dessen Umfang und Inhalt bekannt ist.

289. Aufgabe. $x + z = a$, $y + z = b$, $x^2 + y^2 = z^2$.

290. Aufgabe. Man beschreibe um die Ecken eines regelmäfsigen Sechsecks mit den Seiten sechs Kreisbogen, die nur innerhalb der Figur ausgezogen werden. Wie grofs ist der Inhalt der sternförmigen Figur?

291. Aufgabe. Ein Kreis ist um ein gezeichnetes gleichschenkliges Dreieck beschrieben. Man berechne einen zweiten Kreis, der die gleichen Seiten und den Kreis berührt.

292. Aufgabe. Dieselbe Aufgabe ist für ein ungleichschenkliges Dreieck zu lösen.

293. Aufgabe. Wem ist $\rho \rho_a \rho_b \rho_c$ gleich?

294. Aufgabe. In einem Dreieck sind in A und B Senkrechte zu den Seiten AC und BC errichtet und bis zum Schnittpunkte verlängert. Man berechne die Länge derselben.

295. Aufgabe. Ein Dreieck durch eine Linie, deren Richtung bekannt ist, in zwei gleiche Teile zu teilen.

296. Aufgabe. Ein Kreis ist durch einen Durchmesser und eine senkrecht zu demselben gezogene Sehne in vier Teile zerlegt. Die vier einbeschriebenen Kreise zu berechnen.

297. Aufgabe. Ein Kreis und ein Centriwinkel ist gegeben. Verlangt wird eine Sehne, welche durch die Schenkel in drei gleiche Teile zerfällt.

298. Aufgabe. Man bestimme den Schwerpunkt des Quadrates, Rechtecks, Parallelogramms. (Teilung durch die Diagonale in zwei Dreiecke.) Wo liegt also der Schwerpunkt des allgemeinen Vierecks?

Die Ecken sind mit gleichen Massen belegt. Man bestimme den Schwerpunkt dieser vier Massen; ferner den Schwerpunkt des Dreiecks, wenn seine Seiten allein berücksichtigt werden.

§ 36. Aufgaben und Lehrsätze über das Verhältnis von Teilstrecken.

299. Aufgabe. Eine Strecke a nach innen und aufsen im Verhältnis von $m : n$ zu teilen.

Erste Lösung (geometrisch). In beistehender Fig. 136 ist $AC = a, AF = m$ beliebig gezogen und parallel dazu $CG = CE = n$.

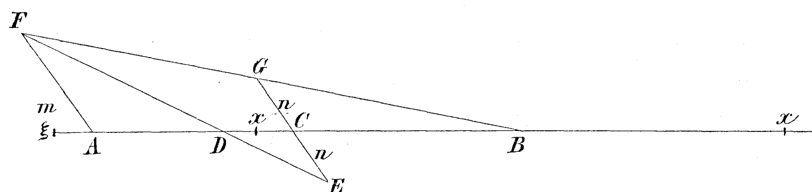


Fig. 136.

Die Punkte D und B, worin FE und FG die Strecke AC schneiden, leisten das Verlangte.

Beweis. Es ist $FDA \sim EDC$, $BCG \sim BAF$ und darum $\frac{DA}{DC} = \frac{m}{n}$, $\frac{BA}{BC} = \frac{m}{n}$.

Einschränkung. Man erhält nur einen Punkt, welcher eine Strecke nach innen im gegebenen Verhältnis teilt. Denn gäbe es zwischen A und C noch einen Punkt x, für den $\frac{xA}{xC} = \frac{m}{n}$ wäre, so müfste $\frac{xA}{xC} = \frac{DA}{DC}$ sein, da $\frac{DA}{DC} = \frac{m}{n}$ ist. Dies ist nicht möglich; denn aus der letzten Verhältnisgleichung würde durch Umstellung der innern Glieder folgen: $\frac{xA}{DA} = \frac{xC}{DC}$. Von diesen Brüchen ist aber stets einer echt, der andere unecht. Sie können somit nicht gleich sein.

Auch giebt es nur **einen** Punkt auf der Verlängerung von AC, welcher die Aufgabe löst. Befindet sich z. B. in vorstehender Figur ein Punkt x rechts von B, für den $\frac{xA}{xC} = \frac{m}{n}$ wäre, so müfste sein $\frac{xA}{xC} = \frac{BA}{BC}$ oder $\frac{xA}{xA - xC} = \frac{BA}{BA - BC}$ oder $\frac{xA}{AC} = \frac{BA}{AC}$ oder $xA = BA$, was unmöglich ist.

Ebensowenig kann ein Punkt ξ, der links von A liegt, die verlangte Eigenschaft besitzen. Denn alsdann müfste $\frac{\xi A}{\xi C} = \frac{BA}{BC}$ oder ein echter Bruch gleich einem unechten sein.

Wegen der hervorragenden Bedeutung dieser Aufgabe soll eine zweite, algebraische Lösung gegeben werden.

Zweite Lösung. Bezeichnet man AC mit a und die Entfernung des innern Teilpunktes D von A mit x, so soll sein $\frac{x}{a - x} = \frac{m}{n}$. Hieraus gewinnt man $x = \frac{am}{m + n}$.

Wird ferner für den äufsern Teilpunkt B die Strecke AB mit x_1 bezeichnet, so hat man die Gleichung $\frac{x_1}{x_1 - a} = \frac{m}{n}$ zu lösen, welche $x_1 = \frac{am}{m - n}$ liefert. Setzt man $\frac{n}{m} = \lambda$, so wird

$$x = \frac{a}{1 + \lambda},\ x_1 = \frac{a}{1 - \lambda}.$$

An diese Ergebnisse knüpfen wir nun folgende Bemerkungen:

Die gesuchten Gröfsen x und x_1 sind mit den bekannten Gröfsen a, m, n durch eine Gleichung ersten Grades verbunden,

d. h. man erhält für x und x_1 nur je einen Wert. Die Aufgabe hat also nur eine Lösung.

Willkürlich war bei der geometrischen Lösung die Lage von AF. Ändert man dieselbe, so beschreiben F und G oder F und E Kreise. Darum kann die Lösung dahin abgeändert werden, dafs man um A und C mit m und n Kreise beschreibt, zwei parallele Durchmesser zieht und ihre Endpunkte geeignet verbindet. Man erhält dann auf der Centrale zwei bemerkenswerte Punkte, welche der innere bezw. äufsere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise heifsen.

Die Punkte D und B teilen AC in demselben Verhältnis. Die vier Punkte A, C, D, B heifsen harmonische Punkte, und zwar nennt man A und C das eine, B und D das andere Paar zugeordneter harmonischer Punkte.

Auf die Ähnlichkeitspunkte und die harmonischen Punkte kommen wir ausführlich zurück.

8. Der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von zwei festen Punkten in dem Verhältnis $m : n$ stehen, ist ein Kreis, der über der Entfernung derjenigen Punkte E und D als Durchmesser beschrieben ist, die BC nach innen und aufsen im Verhältnis von $m : n$ teilen (Apollonischer Kreis).

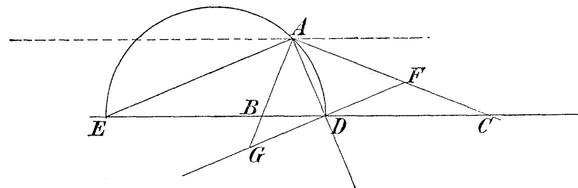


Fig. 137.

Beweis. In der Fig. 137 teilen D und E die Strecke BC im Verhältnis $m : n$. Ein beliebiger Punkt A des Kreises über dem Durchmesser DE ist mit E, B, D, C verbunden und GF parallel AE gezogen. Es soll für den Punkt A gezeigt werden, dafs $AB : AC = m : n$ ist und dafs kein Punkt P aufserhalb des Kreises dieselbe Eigenschaft besitzt.

Es ist $$\frac{DB}{DC} = \frac{m}{n}, \; \frac{EB}{EC} = \frac{m}{n}$$

und darum $$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \text{ oder } \frac{DB}{EB} = \frac{DC}{EC}.$$

Aus ähnlichen Dreiecken folgt aber $\frac{DB}{EB} = \frac{DG}{EA}$ und $\frac{DC}{EC} = \frac{DF}{EA}$.

Darum ist $$\frac{DG}{EA} = \frac{DF}{EA} \text{ oder } DG = DF.$$

Nun ist $AGD \cong AFD$ ($\sphericalangle\ ADF = DAE = 90^0$). AD halbiert somit den Winkel BAC und nach Lehrsatz 64 S. 96 ist

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{m}{n}.$$

Um zu beweisen, daſs ein Punkt auſserhalb oder innerhalb des Kreises die Eigenschaft nicht haben kann, wählen wir die indirekte Beweisform.

Es sei für einen Punkt P, der nicht auf dem Kreise liegt, $\frac{PB}{PC} = \frac{m}{n}$. Dann ist auch, da E und D die Gerade BC im Verhältnis $m : n$ teilen, $\frac{PB}{PC} = \frac{DB}{DC}$ und $\frac{PB}{PC} = \frac{EB}{EC}$. Darum halbieren nach Lehrsatz 65 S. 97 PD und PE den Winkel BPC bezüglich dessen Nebenwinkel. Es müssen somit PD und PE aufeinander senkrecht stehen, was nach dem Beweise des geometrischen Ortes 5 nicht möglich ist.

Aufgaben. Ein Dreieck zu zeichnen aus: ***300.*** $a, b : c = m : n, h_a$; ***301.*** $a,\ b : c = m : n,\ \alpha$. (Vgl. Aufgabe 234 S. 99.)

Anleitung. Man bestimme A als Durchschnitt zweier geometrischer Örter, wovon der eine der vorhin bewiesene ist.

17. Übungslehrsatz. Stehen zwei Dreiecke über derselben Grundlinie, so trifft die Verbindungslinie der Spitzen die Grundlinie in einem solchen Punkte, daſs das auf der Verbindungslinie entstehende Teilverhältnis dem Verhältnisse der Inhalte gleich ist.

Anleitung. Die Inhalte der beigezeichneten Dreiecke ABC und ABD (Fig. 138) verhalten sich wie die Höhen, und die Höhen wiederum wie die Strecken EC und ED. (Ähnliche Dreiecke.)

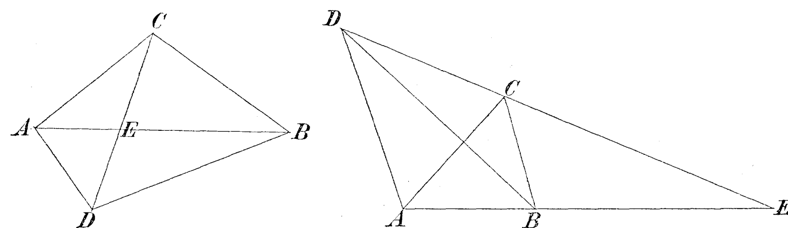


Fig. 138.

68. Lehrsatz (Satz des Menelaus). Trifft eine Gerade zwei Seiten eines Dreiecks und eine Verlängerung oder die drei Verlängerungen, so ist das Produkt aus den Teilverhältnissen, richtig gelesen, gleich eins.

Beweis. Die Teilpunkte auf den Seiten bezüglich deren Verlängerungen seien mit α, β, γ bezeichnet (Fig. 139), je nachdem sie sich auf A, B, oder C gegenüberliegenden Seiten befinden. Man bildet nun das Produkt der Teilverhältnisse in folgender Art. Man geht von irgend einem Teilpunkte, etwa α, aus und bildet das Teilverhältnis $\frac{\alpha B}{\alpha C}$. Im Nenner ist der Punkt C erreicht, welcher nur in dem Teilverhältnis $\frac{\beta C}{\beta A}$ vorkommt. A führt in gleicher Weise zu $\frac{\gamma A}{\gamma B}$. Das Produkt, richtig gelesen, ist $\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B}$.

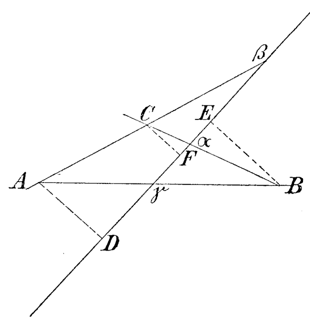


Fig. 139.

Fällt man nun von den Ecken auf die Schnittlinien die Senkrechten, so ist aus ähnlichen Dreiecken:

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{BE}{CF}; \quad \frac{\beta C}{\beta A} = \frac{CF}{AD}; \quad \frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{AD}{BE}.$$

Durch Multiplikation ergiebt sich: $\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1.$

69. Lehrsatz (Satz des Ceva). Wenn von den Ecken eines Dreiecks drei Schnittlinien ausgehen, die sich in einem Punkte treffen, so schneiden dieselben entweder die drei Gegenseiten oder eine Gegenseite und die Verlängerungen der beiden andern. Der erste Fall tritt ein, wenn der Schnittpunkt im Innern des Dreiecks liegt, der zweite, wenn er außerhalb des Dreiecks liegt. In beiden Fällen ist das Produkt der Teilverhältnisse, richtig gelesen, gleich eins.

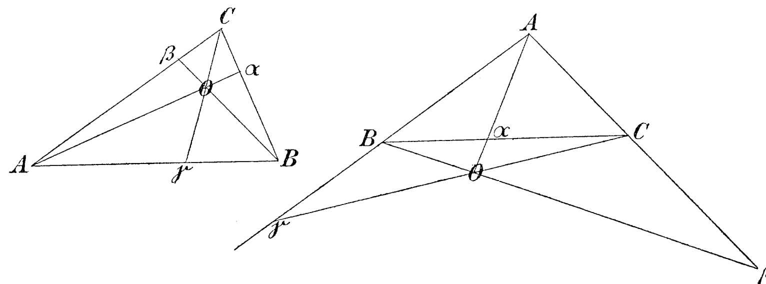


Fig. 140.

Beweis. Ist I_1 der Inhalt von BOC (Fig. 140), I_3 der Inhalt von AOB, I_2 der Inhalt von AOC, so ist nach Übungssatz 16:

$\frac{\gamma A}{\gamma B} = \frac{I_2}{I_1}$; $\frac{\alpha B}{\alpha C} = \frac{I_3}{I_2}$; $\frac{\beta C}{\beta A} = \frac{I_1}{I_3}$; folglich $\frac{\gamma A}{\gamma B} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} = 1$.

70. Lehrsatz (Umkehrung des Satzes des Menelaus). Sind auf zwei Seiten eines Dreiecks und auf der Verlängerung der dritten oder auf den Verlängerungen der drei Seiten drei Punkte gegeben, für welche das Produkt der Teilverhältnisse, richtig gelesen, gleich eins ist, so liegen die drei Punkte in gerader Linie.

Beweis. Es liege (Fig. 139) γ auf AB, α auf BC und β auf der Verlängerung von AC. Verbindet man γ mit α, so soll bewiesen werden, dafs $\gamma\alpha$ durch β geht.

$\gamma\alpha$ trifft zunächst sicher die Verlängerung und nicht die Strecke AC. Angenommen $\gamma\alpha$ treffe die Verlängerung von AC in β_1, dann müfste sein (Lehrsatz 68):

$$\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta_1 C}{\beta_1 A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1.$$

Nun ist aber gemäfs Voraussetzung $\frac{\alpha B}{\alpha C} \cdot \frac{\beta C}{\beta A} \cdot \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1$, und daraus würde folgen $\frac{\beta_1 C}{\beta_1 A} = \frac{\beta C}{\beta A}$, was unmöglich ist (vgl. Aufg. 299).

Diesem Beweise ganz ähnlich wird der Beweis für den zweiten Teil des Satzes geführt. Auch die beiden Teile der Umkehrung vom Satze des Ceva sind der vorigen Ableitung genau entsprechend zu beweisen. Derselbe lautet umgekehrt:

71. Lehrsatz. Sind auf den drei Seiten eines Dreiecks oder auf einer Seite und den Verlängerungen der beiden andern drei Punkte α, β, γ so gegeben, dafs das Produkt ihrer Teilverhältnisse, richtig gelesen, gleich eins ist, so schneiden sich die Linien $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ in einem Punkte.

Hierzu die Aufgaben 313—318 S. 126.

§ 37. Harmonische Punkte und Strahlen.

Zum Begriffe und zur Zeichnung harmonischer Punkte führt uns die Aufgabe 299 S. 109.

Vier Punkte A, B, C, D sind harmonische Punkte, wenn zwei von ihnen die Strecke zwischen den beiden andern nach innen und aufsen in demselben Verhältnisse teilen. Es mögen C und D die Strecke AB (Fig. 141) nach innen und aufsen in demselben Verhältnis teilen. A, B und C, D heifsen dann zugeordnete Punkte. Man

sagt, C, D trennen A, B harmonisch. Das Umgekehrte ist ebenso richtig; denn wenn $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$, so ist auch $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$.

Sind zwei Punkte A und B gegeben, so giebt es eine unendliche Zahl Punktepaare, die A und B harmonisch trennen. Nimmt man nämlich zwischen A und B den Punkt C beliebig an, und teilt man AB nach aufsen in dem Verhältnisse $CA : CB$, so gewinnt man den C zugeordneten Punkt D.

302. Aufgabe. Zu drei Punkten A, B, C den vierten, C zugeordneten harmonischen Punkt zu finden (vgl. Aufgabe 299).

Der Wichtigkeit des Gegenstandes entsprechend folgt eine neue

Lösung. Man wähle E (Fig. 141) beliebig und ziehe EA, EB, EC. O ist auf EC beliebig gewählt und mit A und B verbunden. Hierdurch erhält man α und β. Der Schnittpunkt von $\alpha\beta$ mit AB ist der gesuchte vierte harmonische Punkt.

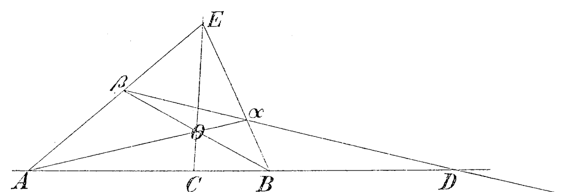


Fig. 141.

Beweis. Nach dem Satze des Ceva ist $\frac{CA}{CB} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha E} \cdot \frac{\beta E}{\beta A} = 1$ und nach dem Satze des Menelaus $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha E} \cdot \frac{\beta E}{\beta A} = 1$. Durch Division folgt hieraus:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

Besprechung der Lösung. Ist C Mittelpunkt von AB, so ist $\frac{CA}{CB} = 1$ und darum $\frac{\alpha B}{\alpha E} \cdot \frac{\beta E}{\beta A} = 1$, d. h. $\frac{\alpha B}{\alpha E} = \frac{\beta A}{\beta E}$; $\alpha\beta$ ist dann parallel zu AB (Satz 55 S. 81), der Punkt D wird zum unendlich fernen Punkte. Der Mittelpunkt einer Strecke und der unendlich ferne Punkt der Geraden trennen somit die Endpunkte der Strecke harmonisch. Rückt C in die Nähe von B, so rücken O und α zusammen, während β in die Nähe von E gelangt und D nach B wandert. Fällt C mit A zusammen, so ergiebt sich ebenso, dafs dann $\alpha\beta$ die Strecke AB in A schneidet. Fällt also von vier harmonischen Punkten der eine von zwei zugeordneten Punkten mit einem der beiden andern zusammen, so fällt auch der andere zugeordnete Punkt mit demselben zusammen. Durchläuft demnach C (siehe Fig. 141) die Strecke von der Mitte von

AB bis B, so durchläuft D die Strecke vom unendlich fernen Punkt bis B. Durchläuft C die andere Hälfte von AB, so durchwandert D die Strecke vom unendlich fernen Punkte bis A.

Läſst man O nach und nach verschiedene Lagen auf EC annehmen, so ändert sich dadurch auch die Lage von α und β. Stets aber schneidet $\alpha\beta$ die Linie AB in demselben Punkte. Nach dem Satze des Ceva ist nämlich für die verschiedenen α und β: $\frac{CA}{CB} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha E} \cdot \frac{\beta E}{\beta A} = 1$. Da aber $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ ist, so folgt: $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha E} \cdot \frac{\beta E}{\beta A} = 1$.

Nach der Umkehrung des Satzes des Menelaus liegt somit D stets in gerader Linie mit den verschiedenen Punktepaaren α und β.

Zieht man noch in der Fig. 142 βC und αC und bezeichnet ihre Schnittpunkte mit EB bezüglich EA mit α_1 und β_1, so sind E, B, α, α_1 und E, A, β, β_1 harmonische Punkte. Es ist, um bei den vier ersten Punkten zu bleiben, $\frac{CA}{CB} \cdot \frac{\alpha B}{\alpha E} \cdot \frac{\beta E}{\beta A} = 1$ (Ceva), $\frac{CA}{CB} \cdot \frac{\alpha_1 B}{\alpha_1 E} \cdot \frac{\beta E}{\beta A} = 1$ (Menelaus). Hieraus folgt:

$$\frac{\alpha B}{\alpha E} = \frac{\alpha_1 B}{\alpha_1 E}.$$

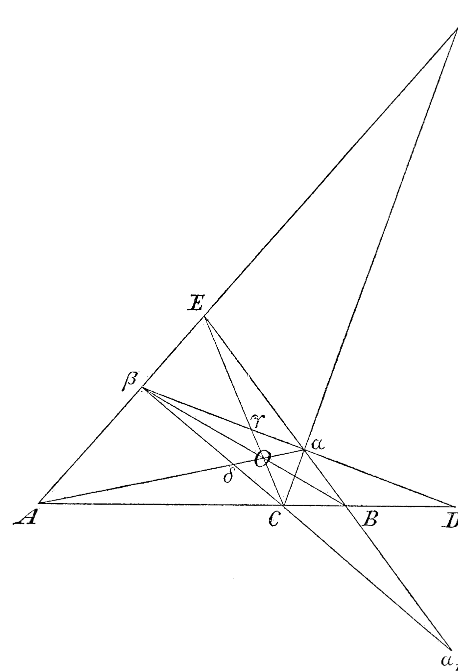


Fig. 142.

Liegen vier Punkte A, B, C, D in einer geraden Linie, so kann man sich die Strecke zwischen zwei beliebigen von ihnen, z. B. BD, durch die beiden andern C und A geteilt vorstellen. Es ergeben sich dann zwei Teilverhältnisse. Das Verhältnis dieser beiden Teilverhältnisse nennt man nach Möbius ein Doppelverhältnis.

Bei unserer Anordnung lautet das Doppelverhältnis: $\frac{CB}{CD} : \frac{AB}{AD}$.

Gerade Linien, welche durch denselben Punkt gehen, bilden ein Strahlenbüschel. Die einzelnen Linien heiſsen Strahlen.

72. Lehrsatz. Werden vier Strahlen von einer Geraden geschnitten, so ist das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte unveränderlich (Lehrsatz des Pappus).

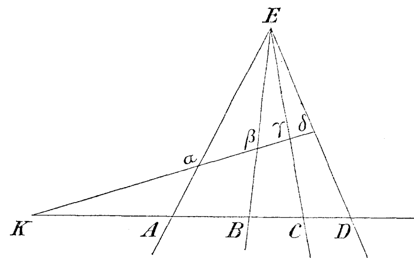


Fig. 143.

Beweis. Die vier Strahlen der Fig. 143 mögen von zwei willkürlichen Geraden, die sich in K treffen, geschnitten werden. Wenden wir nun auf das Dreieck $K\gamma C$ den Satz des Menelaus an, so ist, wenn EB und ED die Schnittlinien sind:

$$\frac{\beta K}{\beta\gamma} \cdot \frac{E\gamma}{EC} \cdot \frac{BC}{BK} = 1,$$

$$\frac{\delta K}{\delta\gamma} \cdot \frac{E\gamma}{EC} \cdot \frac{DC}{DK} = 1, \text{ also } \frac{\beta K}{\delta K} \cdot \frac{DK}{BK} \cdot \frac{\delta\gamma}{\beta\gamma} \cdot \frac{BC}{DC} = 1$$

oder
$$\frac{\beta K}{\delta K} : \frac{BK}{DK} = \frac{\beta\gamma}{\delta\gamma} : \frac{BC}{DC}.$$

Nimmt man EA statt EC, so ergiebt sich $\frac{\beta K}{\delta K} : \frac{BK}{DK} = \frac{\beta\alpha}{\delta\alpha} : \frac{BA}{DA}$,

$$\text{also } \frac{\beta\gamma}{\delta\gamma} : \frac{BC}{DC} = \frac{\beta\alpha}{\delta\alpha} : \frac{BA}{DA} \text{ oder } \frac{\gamma\beta}{\gamma\delta} : \frac{\alpha\beta}{\alpha\delta} = \frac{CB}{CD} : \frac{AB}{AD}.$$

Verbindet man einen Punkt mit vier harmonischen Punkten, so erhält man vier harmonische Strahlen.

73. Lehrsatz. Vier harmonische Strahlen werden von einer beliebigen Geraden in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Der ***Beweis*** folgt unmittelbar aus dem Lehrsatz des Pappus. Ist die Gerade der Schnittlinie parallel, so folgt der Beweis aus ähnlichen Dreiecken.

303. Aufgabe. Man suche an Fig. 142 sämtliche harmonische Punkte und Strahlen auf.

74. Lehrsatz. Halbiert man die Strecke zwischen zwei zugeordneten Punkten, so ist die halbe Strecke das geometrische Mittel zu den Entfernungen des Halbierungspunktes von zwei andern zugeordneten Punkten.

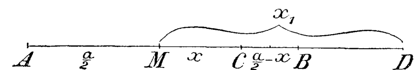


Fig. 144.

Beweis. A, B, C, D (Fig. 144) seien vier harmonische Punkte, M die Mitte von AB. Bezeichnet man MC mit x und MD mit x_1, so ist $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$,

$$\frac{\frac{a}{2}+x}{\frac{a}{2}-x}=\frac{x_1+\frac{a}{2}}{x_1-\frac{a}{2}}.$$

Hieraus folgt $x x_1 = \frac{a^2}{4}$ oder $MA^2 = MB^2 = MC \cdot MD$.

75. Lehrsatz. Liegen vier Punkte A, B, C, D auf einer Geraden so, daſs $MA^2 = MB^2 = MC \cdot MD$ ist, wobei M die Mitte von AB ist, so sind dieselben harmonische Punkte, und zwar sind A, B und C, D zugeordnete Punkte.

Beweis. Da $MA^2 = MC \cdot MD$ ist, so folgt, wenn wir die vorhin angewandten Bezeichnungen beibehalten, zunächst:

$$\frac{a^2}{4} = x \cdot x_1 \text{ oder } x_1 = \frac{a^2}{4x}.$$

Ferner ist $\frac{CA}{CB} = \frac{\frac{a}{2}+x}{\frac{a}{2}-x}$, $\frac{DA}{DB} = \frac{x_1+\frac{a}{2}}{x_1-\frac{a}{2}}$. Ersetzt man x_1 durch $\frac{a^2}{4x}$, so ergiebt sich $\frac{DA}{DB} = \frac{\frac{a}{2}+x}{\frac{a}{2}-x}$, d. h. $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$.

304. Aufgabe. Man zeige, daſs die Punkte, in welchen die Halbierer eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels die Gegenseite schneiden, von den Eckpunkten der Gegenseite harmonisch getrennt werden (vgl. Lehrsatz 64 S. 96).

305. Aufgabe. Bezeichnet man bei vier harmonischen Punkten $A, B; C, D$ AB mit r, AC mit a und AD mit b, so beweise man, daſs $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r}$ ist.

Anleitung. Man setze in $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ die Werte a, b, r ein.

§ 38. Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise. Ähnliche und umgekehrte Abbildung.

Die Aufgabe 299 (S. 109) führt zu den Ähnlichkeitspunkten zweier Kreise. Dieselben teilen die Centrale nach innen und auſsen im Verhältnis der Radien. Demnach trennen sie die beiden Mittelpunkte harmonisch. Jeder durch einen Ähnlichkeitspunkt gehende Strahl heiſst Ähnlichkeitsstrahl.

76. Lehrsatz. Jeder Ähnlichkeitsstrahl schneidet die Kreise in solchen Punkten, daſs die zugehörigen Radien paarweise parallel sind.

Beweis. Es sei weder RF noch RH (Fig. 145) parallel OE. Dann ziehe man eine Parallele, welche PF in R_1 trifft; $RF_1 \parallel OE$. Dann ist $$OE : RF_1 = OP : RP.$$

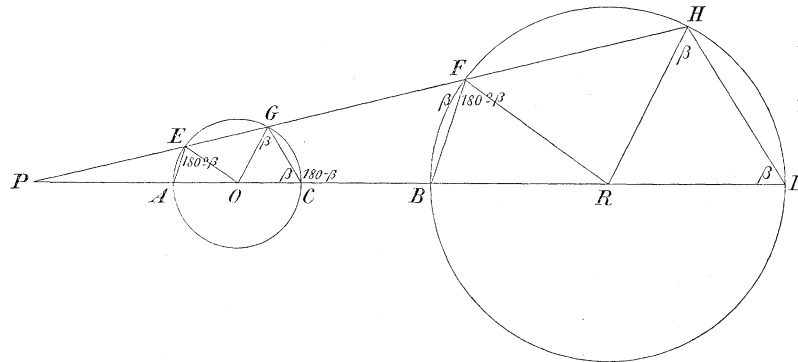


Fig. 145.

Es ist aber $OE = r$, $RF = \rho$, $OP : RP = r : \rho$, folglich
$$OE : RF_1 = r : \rho, \text{ d. h. } RF_1 = \rho.$$
Der Ähnlichkeitsstrahl schnitte also den Kreis in drei Punkten.

306. Aufgabe. An zwei Kreise die gemeinsamen Tangenten zu ziehen.

Die Ähnlichkeitspunkte führen zur ähnlichen und umgekehrten Abbildung. Zieht man durch den Punkt P die Centrale und einen Ähnlichkeitsstrahl, so ist zunächst $PE : PF = r : \rho$ und ebenso $PG : PH = r : \rho$. Jedem Punkte des Kreises um O entspricht ein Punkt des Kreises um R, und zwar in der Art, daſs die Entfernungen entsprechender Punkte vom Ähnlichkeitspunkte gleiches Verhältnis haben. Der Kreis um R ist die ähnliche Abbildung des andern. P ist Augenpunkt, $r : \rho$ Verhältnis der Abbildung.

Man erkennt ferner durch die Methode der Winkelberechnung, daſs sowohl $GCBF$ als auch $EADH$ Kreisvierecke sind. ($\sphericalangle RDH$ ist β genannt und den übrigen die Bezeichnung β oder $180^0 - \beta$ gegeben nach dem Satze 40 und 76.) Darum ist $PG \cdot PF = PC \cdot PB$ und $PE . PH = PA \cdot PD$.

Dreht man den Strahl PH, bis er Tangente wird, so fallen die Punkte E und G und auch F und H je in einen zusammen. Die linken Seiten der vorstehenden Gleichungen werden dann gleich. Es haben also $PC \cdot PB$ und $PA \cdot PD$ denselben Wert. Darum ist auch $PG \cdot PF = PE \cdot PH = PC \cdot PB = PA \cdot PD$.

Es entsprechen sich demnach auf den beiden Kreisen die Punktepaare $E, H; G, F; A, D; C, B,$ und zwar in der Art, daſs das Produkt der Entfernungen entsprechender Punkte vom Ähnlichkeitspunkte denselben Wert hat. Der eine Kreis heiſst die umgekehrte Abbildung des andern. P ist Augenpunkt, $PA \cdot PD$ ist Potenz der Abbildung. Der Gegenstand wird später nochmals erörtert werden.

§ 39. Chordale zweier Kreise.

Wir lösen zuerst die

307. Aufgabe. Auf der Geraden BC einen Punkt F zu bestimmen, so daſs $CF^2 - BF^2 = d^2$ wird.

Vgl. „100 Aufgaben" S. 32.

9. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Quadrate der Entfernungen von zwei festen Punkten C und B gleich einer vorgeschriebenen Gröſse d^2 ist, ist die auf BC in F errichtete Senkrechte, wenn $FC^2 - FB^2 = d^2$ ist.

Beweis. Man bestimme F nach Aufgabe 307 und verbinde irgend einen Punkt A der auf BC in F errichteten Senkrechten mit C und B. Dann ist

$$AC^2 - AB^2 = CF^2 + AF^2 - BF^2 - AF^2 = CF^2 - BF^2 = d^2.$$

Kein Punkt auſserhalb dieser Senkrechten hat dieselbe Eigenschaft.

Die vorstehenden Entwicklungen führen auf eine Gerade, deren Punkte in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenz haben. Man nennt dieselbe Chordale, Linie gleicher Potenz, Linie gleicher Tangenten oder auch Radikalachse. Zur Bestimmung der Chordale beweisen wir folgendes (vgl. „100 Aufgaben" S. 35 f.):

1. Wenn die von einem Punkte an zwei Kreise gezogenen Tangenten gleich sind, so trifft die von diesem Punkte auf die Centrale gefällte Senkrechte dieselbe derart, daſs die Differenz der Quadrate der Teilstücke gleich der Differenz der Quadrate der Radien ist.

2. Wenn die Centrale derartig durch eine Senkrechte geteilt ist, daſs die Differenz der Quadrate der Teilstücke gleich der Differenz der Quadrate der Radien ist, so gehen von jedem Punkte der Senkrechten gleiche Tangenten an den Kreis.

Schneiden sich zwei Kreise, so ist die gemeinsame Sekante die Chordale.

Eine Schar von Kreisen mit gemeinschaftlicher Chordale (und Centrallinie) heifst ein Kreisbüschel. Die Kreise des Büschels gehen entweder alle durch zwei feste Punkte (die auch zusammenfallen können) oder das Büschel besteht aus lauter sich nicht schneidenden Kreisen.

Aufgaben. Man zeichne ein Dreieck, von dem gegeben ist: ***308.*** a, $b^2 - c^2$, α; ***309.*** a, $b^2 - c^2$, h_a.

310. Aufgabe. Man bestimme den geometrischen Ort des Mittelpunkts eines Kreises, welcher zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet.

Kreise schneiden sich unter dem Winkel, der von den Tangenten im Schnittpunkte gebildet wird.

311. Aufgabe. Man zeige, dafs die Chordalen dreier Kreise sich in einem Punkte schneiden.

312. Aufgabe. Man bestimme einen Punkt, von dem aus an drei Kreise gleiche Tangenten möglich sind.

Anmerkung. Eine ähnliche Darstellung, wie hier über die Chordale gegeben ist, ergiebt sich auch für die Aufgabe: Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene unter Durchmessern schneidet. (Vgl. „100 Aufgaben" S. 39. Siehe überdies die dort gegebene Lösung der Aufgabe: Einen Kreis zu beschreiben, der drei andere berührt [Apollonisches Taktionsproblem].)

§ 40. Ähnliche und umgekehrte Abbildung.

Nimmt man auf Strahlen, welche durch denselben Punkt O gehen (Fig. 146), die Punkte A, B, C u. s. w. an und bestimmt auf jedem je einen Punkt A_1, B_1, C_1 u. s. w., so dafs $OA : OA_1 = OB : OB_1 = OC : OC_1 = m$ ist, so nennt man die Figur, welche durch die letztern Punkte gebildet wird, die ähnliche Abbildung der durch die ursprünglichen Punkte bestimmten Figur. Beschränken wir uns zunächst auf drei Punkte, so ist $AB \parallel A_1B_1$. Ebenso ist

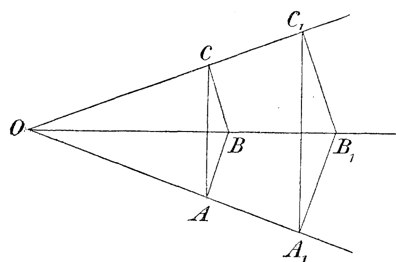


Fig. 146.

$$AC \parallel A_1C_1, \quad BC \parallel B_1C_1.$$

Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind somit ähnlich.

In gleicher Weise ergiebt sich, dafs jedes Vieleck $ABCDE\ldots$ dem Vieleck $A_1B_1C_1D_1E_1\ldots$ ähnlich ist, weil die Winkel gleich sind und die entsprechenden Seiten dasselbe Verhältnis haben. Daher die Benennung: ähnliche Abbildung.

Der Punkt O heifst der Bildpunkt oder Augenpunkt.

Liegen die Punkte A, B, D u. s. w. auf einer Geraden, so sind A_1, B_1, D_1 ebenfalls Punkte einer Geraden, und zwar ist dieselbe der ursprünglichen parallel.

Sind nämlich A, B, D Punkte einer Geraden, so liegt auch D_1 auf der durch A_1 und B_1 bestimmten Geraden; denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OB_1D_1 und OBD folgt, dafs Winkel $OBD = OB_1D_1$ ist. D_1 liegt also auf der durch A_1B_1 festgelegten Geraden, welche zu AB parallel ist.

Die ähnliche Abbildung eines Kreises ist ein Kreis.

Beweis. Zieht man vom Bildpunkt P (Fig. 147) den Durchmesser PAB und bestimmt die zugehörigen Punkte A_1 und B_1, so ist:

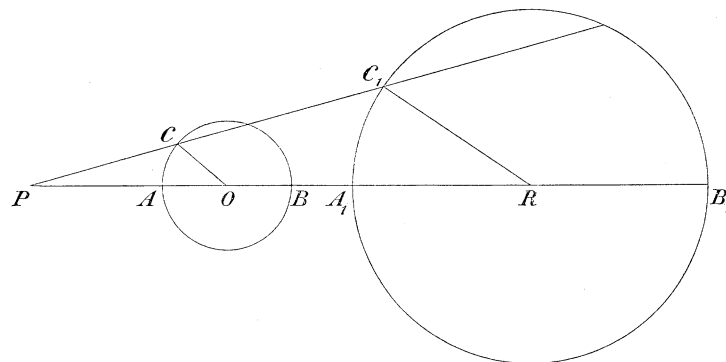


Fig. 147.

$$\frac{PA}{PA_1} = \frac{PB}{PB_1} = m \text{ oder } \frac{PB}{PA} = \frac{PB_1}{PA_1} \text{ oder } \frac{PB - PA}{PA} = \frac{PB_1 - PA_1}{PA_1},$$

d. h.

$$\frac{AB}{PA} = \frac{A_1B_1}{PA_1}.$$

Bezeichnet man die Hälften von AB und A_1B_1 mit r bezüglich ρ, so ist:

$$\frac{r}{\rho} = \frac{PA}{PA_1} = m.$$

Hieraus folgt $\dfrac{PA + r}{r} = \dfrac{PA_1 + \rho}{\rho}$ oder $\dfrac{PO}{PR} = \dfrac{r}{\rho} = m.$

Bestimmt man zu C den zugehörigen Punkt C_1, so ist

$$\frac{PC}{PC_1} = m \text{ und damit } \frac{PO}{PR} = \frac{PC}{PC_1}.$$

Es ist also $POC \sim PRC_1$ und somit $\frac{PO}{PR} = \frac{OC}{RC_1} = \frac{r}{\rho}$,

d. h. $RC_1 = \rho$.

C_1 liegt daher wie jeder andere entsprechende Punkt auf einem um R mit RA_1 beschriebenen Kreise.

Anmerkung 1. Beim vorigen Beweise ergiebt sich:

$$\frac{PA}{PA_1} = \frac{PB}{PB_1} = \frac{PC}{PC_1} = \frac{r}{\rho}.$$

Der Punkt P ist also Ähnlichkeitspunkt beider Kreise.

Anmerkung 2. Wir haben in den Figuren die entsprechenden Punkte stets auf derselben Seite vom Bildpunkt angenommen. Man kann aber auch die Punkte auf entgegengesetzten Seiten annehmen. Hierdurch gelangt man bei zwei Kreisen zum innern Ähnlichkeitspunkt.

Übrigens ist vorstehender Beweis nur der Vollständigkeit wegen geführt worden. Die Richtigkeit der Behauptung ergiebt sich zur Genüge aus den Darlegungen des § 38, S. 119 unten. Auch für die umgekehrte Abbildung einer Geraden möge ein entsprechender Beweis folgen.

Die umgekehrte Abbildung einer Geraden ist ein Kreis durch den Bildpunkt.

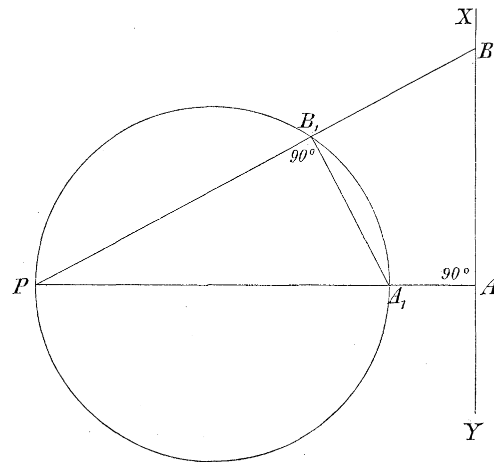


Fig. 148.

Beweis. Es ist (Fig. 149)

$PA \cdot PA_1 = PB \cdot PB_1 = k^2$ und $PA \perp XY$.

Darum ist

$\frac{PA}{PB} = \frac{PB_1}{PA_1}$ und somit

$PB_1A_1 \sim PAB$.

Hieraus folgt:

$\measuredangle B_1 = A = 90^0$.

B_1 wie jeder andere entsprechende Punkt liegt somit auf dem über PA_1 als Durchmesser beschriebenen Kreise.

Demgemäſs ist der Kreis die umgekehrte Abbildung der Geraden mit dem Bildpunkte P und der Potenz k^2.

Die umgekehrte Abbildung eines nicht durch den Bildpunkt gehenden Kreises ist ein Kreis.

Auch hier sind die Bildpunkte die Ähnlichkeitspunkte. Nähert sich der eine von zwei entsprechenden Punkten dem Punkte P, so flieht der andere. Daher die Benennung: umgekehrte Abbildung. Im übrigen vgl. § 38, S. 119 unten.

Fig. 149.

§ 41. Umgekehrte Abbildung, Chordale, Pol und Polare.

Wir entwerfen folgende Figuren (Fig. 149 und 150): Ein Kreis mit dem Radius $OH = r$ ist gegeben. Wir bestimmen A und B so, dafs $OA \cdot OB = r^2$ ist. $BC \perp OB$ ist dann die umgekehrte Abbildung des Kreises, der über OA als Durchmesser beschrieben wird. O ist Bildpunkt. BC ist nun auch Chordale der Kreise FHG und OEA. Denn für die Fig. 150 ergiebt sich, dafs für den Punkt J, in welchem die BC ihrem Bilde (dem Kreise OEA) begegnet,

$$OB \cdot OA = OJ^2 = r^2,$$

also J auch Schnittpunkt der beiden Kreise, mithin BJ gemeinsame Sekante derselben sein mufs. Für die andere Lage (Fig. 149) ist J nicht reell vorhanden. Dennoch ist BC Chordale, weil B gleiche Potenz in Bezug auf beide Kreise hat. Es ist nämlich bezüglich des Kreises OEA

$$BA \cdot BO = (BO - AO)\,BO$$
$$= BO^2 - AO \cdot BO$$
$$= BO^2 - r^2.$$

Fig. 150.

Dies ist aber dem Quadrate der von B an den Kreis FHG gelegten Tangente gleich.

Verbindet man nun den beliebigen Punkt C mit A, so ist

$$OEA \sim CED, \text{ also } OE : EA = CE : ED$$

oder

$$OE \cdot ED = EA \cdot EC.$$

Da aber $OE \cdot ED = OE \cdot OD - OE^2$, so ist auch

$$EA \cdot EC = OE \cdot OD - OE^2.$$

Nun ist $OE \cdot OD = r^2$ (umgekehrte Abbildung),

folglich:

$$EA \cdot EC = r^2 - OE^2 = EF^2.$$

E ist die Mitte von FG. Darum sind C, A und G, F zugeordnete harmonische Punkte. Hieraus leiten wir ab:

1. Wird der Mittelpunkt eines Kreises zum Augenpunkt, das Quadrat seines Radius r^2 zur Potenz einer umgekehrten Abbildung genommen, so erhält man von zwei zugeordneten Punkten A, B den einen im Innern, den andern aufserhalb des Kreises. Die Punkte der Peripherie sind sich selbst zugeordnet. Die im Punkte B zu OB errichtete Senkrechte ist geometrischer Ort für die vierten harmonischen, dem Punkte A zugeordneten Punkte, während das andere Paar die Kreisschnittpunkte einer willkürlichen, durch A gehenden Sekante sind. Die in B errichtete Senkrechte heifst die Polare des Poles A.

2. Liegt A aufserhalb des Kreises, so ist die Polare die Berührungssehne der von A an den Kreis gezogenen Tangenten. Denn deckt sich C mit J, so fallen auch E und G mit ihm zusammen (S. 115 unten), AGF wird Tangente.

3. Geht ein Kreis durch den Mittelpunkt eines andern, so ist die Chordale derselben Polare des diametral gegenüberliegenden Punktes des ersten Kreises in Bezug auf den zweiten.

4. Verbindet man O mit C, so trifft OC den Kreis OEA im Bildpunkte von C. Nennen wir ihn K. Es ist $\measuredangle\, OKA = 90^0$. Weil nun C Höhenpunkt des Dreiecks DOA ist, so trifft OC auch AD in L unter einem rechten Winkel. L mufs darum mit K zusammenfallen. Es ist somit C Pol von AD. Betrachten wir nun das Dreieck DCA, so ist DC Polare von A, AD Polare von C, AC Polare von D. Man nennt DCA, weil jede Seite Polare von der Gegenecke ist, Poldreieck.

5. Dreht man AF um A, so durchläuft der Pol von AF, nämlich D, die Polare von A. Dies gilt allgemein für jeden Pol und seine Polare.

6. Beschreibt man über DO als Durchmesser einen Kreis, so wird er Bild von FA. Der über OA stehende ist Bild von DB. Die Geraden und ihre Bilder schneiden sich gegenseitig unter dem gleichen Winkel.

7. In jedem Dreiecke findet sich von der Ecke aus eine umgekehrte Abbildung an den Höhen.

$DEBA$ (Fig. 150) ist Kreisviereck. Daher, und weil $OBC \sim OKA$, $OB \cdot OA = OE \cdot OD = OC \cdot OK$.

8. Wie kann man lediglich mit Hülfe des Lineals von einem gegebenen Punkte aus an einen Kreis Tangenten ziehen?

§ 42. Aufgaben zur Einübung der Lehrsätze von Ceva und Menelaus und Anwendungen der ähnlichen und umgekehrten Abbildung.

313. Aufgabe. Man beweise den Satz von den Mittellinien eines Dreiecks.

Anleitung. Dafs die Mittellinien sich in einem Punkte schneiden, beweist man durch die Umkehrung des Satzes des Ceva. Für den zweiten Teil des Satzes wende man auf das Dreieck c, t_b, $\frac{b}{2}$ die Umkehrung des Satzes des Menelaus an. Schnittlinie ist t_c.

314. Aufgabe. Man beweise den Satz über die Winkelhalbierer eines Dreiecks.

Anleitung. Lehrsatz 64 und 74.

315. Aufgabe. Man zeige die Richtigkeit des Höhensatzes.

Anleitung. Ist in dem Dreiecke ABC $AD = h_a$, $BE = h_b$, $CF = h_c$, so ist $ADB \sim CBF$. Hieraus findet man $BD : BF = c : a$. Aus weitern ähnlichen Dreiecken bilde man entsprechende Verhältnisgleichungen.

316. Aufgabe. Man beweise, dafs die Linien, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Berührungspunkten des ein- und der anbeschriebenen Kreise verbinden, zu je drei durch einen Punkt gehen.

Anleitung. Man bestimme nach Aufgabe 147 und 148 die Länge der von den Ecken ausgehenden Tangenten.

317. Aufgabe. Es ist zu zeigen, dafs die drei äufsern Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise und ebenso auch ein äufserer und die beiden nicht zugehörigen innern Ähnlichkeitspunkte in einer geraden Linie liegen.

Man erhält die vier Ähnlichkeitsachsen der drei Kreise.

318. Aufgabe. Man beweise, daſs die Tangenten in den Eckpunkten des einem Kreise einbeschriebenen Dreiecks die Gegenseiten in Punkten einer geraden Linie schneiden.

319. Aufgabe. Zwei Kreise schneiden sich. Welche Figur entsteht, wenn man den einen der beiden Schnittpunkte zum Augenpunkt einer umgekehrten Abbildung macht?

320. Aufgabe. Wie können mit Hülfe der vorigen Aufgabe die Taktionsaufgaben umgebildet werden?

321. Aufgabe. Ein Kreis ist einem Dreieck umbeschrieben. Welche Figur entsteht, wenn man dasselbe umgekehrt abbildet, so daſs der Mittelpunkt des Kreises Augenpunkt und das Quadrat des Radius Potenz der Abbildung wird? Man zeichne die entstehende Figur.

322. Aufgabe. Man ändere die vorige Aufgabe, indem man Augenpunkt und Potenz anders wählt.

323. Aufgabe. Von zwei Kreisen ist r, ρ, c (Centrale) gegeben. Man berechne das Verhältnis der ähnlichen und die Potenz der umgekehrten Abbildung.

324. Aufgabe. Gegeben ein Kreis und zwei Gerade. Man zeichne einen Kreis, welcher den gegebenen und die Geraden berührt.

Lösung. Man beschreibe um den Kreis einen Rhombus, dessen Seiten den gegebenen Geraden parallel sind, und verbinde die Ecken des Rhombus mit dem Schnittpunkte der gegebenen Geraden. Diese Verbindungslinien treffen den Kreis in den Berührungspunkten der gesuchten Kreise.

Beweis. Im Berührungspunkte des gegebenen und des gesuchten Kreises liegt der Augenpunkt einer ähnlichen Abbildung, in welcher die Kreise sich punktweise entsprechen und ebenso der Eckpunkt des Rhombus dem Schnittpunkt der gegebenen Geraden.

325. Aufgabe. In einem Kreise durch einen Punkt seiner Peripherie eine Sehne zu ziehen, welche durch eine zweite gegebene Sehne des Kreises im Verhältnis $m : n$ geteilt wird.

326. Aufgabe. Man bilde aus der vorigen Aufgabe andere, indem man statt der zweiten gegebenen Sehne irgend eine Gerade oder einen Kreis setzt.

327. Aufgabe. b, c, m_a.

Vgl. „100 Aufgaben“ S. 67.

328. Aufgabe. Man beweise den Satz: Bei jedem Dreieck liegen die Mitten der drei Seiten, die Fuſspunkte der drei Höhen und die Mitten der Teile der Höhen zwischen den drei Eckpunkten und dem Höhenpunkte auf einem und demselben Kreise. (Kreis der neun Punkte, Feuerbachscher Kreis. S. 126 Nr. 7.)

§ 43. Über Methoden.

Bei den Beweisen der Sätze und bei der Lösung von Aufgaben haben wir folgende Methoden angewandt:

a) Methode der Winkelberechnung.

Sie besteht darin, daſs man in jeden Winkel der Figur die Gröſse desselben in kurzer Bezeichnung einträgt. Dabei verfolgt man den Zweck, bestimmbare Winkel aufzufinden.

b) Methode der ähnlichen und umgekehrten Abbildung.

c) Methode der Rechnung oder algebraischen Lösung.

Als besondere Kunstgriffe merke man, daſs die Mittellinie oft in zweckmäſsiger Weise über den Fuſspunkt hinaus um sich selbst verlängert wird, daſs der Winkelhalbierer durch die Mitte des Gegenbogens des umbeschriebenen Kreises geht, daſs die Höhe mit dem Winkelhalbierer nach Methode a) zu untersuchen ist, daſs für um- und einbeschriebene Kreise auf die Sätze von den merkwürdigen Punkten und auf die Aufgaben über die Länge der Tangenten zurückzugreifen ist.

d) Methode der geometrischen Örter.

Die wichtigsten geometrischen Örter werden hier zusammengestellt:

1. Der geometrische Ort für alle Punkte, die von einem festen Punkte gleiche Entfernung haben, ist ein um den festen Punkt als Centrum beschriebener Kreis (S. 27).

2. Der geometrische Ort für alle Punkte, die von zwei festen Punkten gleiche Entfernung haben, ist die auf der Verbindungsstrecke der beiden Punkte errichtete Mittelsenkrechte (S. 27).

3. Der geometrische Ort für alle Punkte, die von den Schenkeln eines Winkels gleichen Abstand haben, ist die Halbierungslinie des Winkels (S. 29).

4. Der geometrische Ort aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden einen bestimmten Abstand haben, ist die in dem gegebenen Abstande zu der Geraden gezogene Parallele (S. 33).

5. Der geometrische Ort für die Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte gehen, ist der über der

Verbindungslinie der beiden Punkte als Durchmesser beschriebene Kreis (S. 54).

6. Der geometrische Ort für die Scheitelpunkte aller Winkel α, deren Schenkel durch die Punkte A und B gehen, ist der über der Strecke AB beschriebene Kreisbogen, der den Winkel α faſst (S. 65).

7. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summe der Quadrate ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten eine vorgeschriebene Gröſse hat, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte der Verbindungsstrecke jener Punkte zusammenfällt (S. 106).

8. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Entfernungen von zwei festen Punkten im Verhältnis $m : n$ stehen, ist der Kreis über der Entfernung derjenigen beiden Punkte als Durchmesser, welche die Verbindungsstrecke der beiden gegebenen Punkte im Verhältnis von $m : n$ teilen (S. 111).

9. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Quadrate ihrer Entfernung von zwei Punkten eine vorgeschriebene Gröſse besitzt, ist eine zur Verbindungsstrecke der beiden Punkte senkrechte Gerade (S. 120).

10. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Summe oder Differenz ihrer Abstände von zwei festen Geraden gleich einer gegebenen Gröſse ist, ist eine gerade Linie (S. 58).

11. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Abstände von zwei festen Geraden das Verhältnis $m : n$ haben, ist eine Gerade durch den Durchschnittspunkt der beiden gegebenen Geraden.

Schlufsbemerkung.

I.

Der Würfel (und das Parallelepipedon) zeigt unmittelbar drei verschiedene Abmessungen (Dimensionen), nämlich Länge, Breite und Höhe. Ein entsprechendes Verhalten zeigt bei genauerer Erwägung — man denke an den Hauptsatz des Cavalieri — jedes beliebige körperliche Gebilde. Eine Fläche hat nur zwei Dimensionen, nämlich Länge und Breite; eine Linie hat nur eine Dimension, nämlich die Länge, und der Punkt hat gar keine Ausdehnung. Er bezeichnet einen Ort im Raum, nimmt aber keinen Raum ein. Letztere Eigenschaft teilt er mit dem Zeitpunkte, der eine Zeit bezeichnet, aber nicht ausfüllt.

Wenn wir uns einen Körper vorstellen, z. B. eine Kugel, einen Würfel, so erkennen wir alsbald, dafs derselbe sich auf unzählige Arten in zwei (gleiche oder ungleiche) Teile zerlegen läfst. Die gegenseitige Grenze der beiden Teile ist kein Körper mehr, sondern eine Fläche. Jede Fläche kann wieder in zwei Teile zerlegt werden, und die gegenseitige Grenze beider Teile ist eine Linie. Teilt man nochmals, so erhält man als Grenze einen Punkt. Diese Darstellung gilt ganz allgemein. Es ist bemerkenswert, dafs dabei wiederum die Dreizahl auftritt. Den drei Messungen, die nach der ersten Angabe bei jedem Körper gemacht werden können, entsprechen hier drei Teilungen: die erste Teilung liefert die Fläche, die zweite führt zur Linie und die dritte zum Punkt, der keine Teilung zuläfst.

Die Bewegung eines Punktes erzeugt eine Linie; man kann die Linie als die Gesamtheit der Punkte ansehen, die ein seinen Ort stetig ändernder Punkt durchläuft. Lassen wir nun eine Linie sich so bewegen, dafs ihre sämtlichen Punkte in eine neue, bisher von keinem der betrachteten Punkte eingenommene Lage übergehen, so entsteht durch die angegebene Bewegung einer Linie die Fläche. Endlich kann man aus der Fläche durch entsprechende Bewegung den Körper ableiten. Aber hiermit sind wir an eine unübersteigliche Schranke gelangt. Denn die Bewegung eines Kör-

pers bringt immer wieder einen Körper hervor. Hiermit haben wir das Axiom[1]:

1. Der Raum ist dreidimensional.

Bei der Bewegung des Körpers machen wir ferner die Annahme, dafs derselbe seine Gestalt nicht ändere, d. h. dafs je zwei willkürlich angenommene Punkte des Körpers stets denselben gegenseitigen Abstand behalten. Diese Annahme scheint so einleuchtend, dafs es einiger Anstrengung bedarf, um sich vom Gegenteil überhaupt eine Vorstellung zu machen[2]. Wir haben von diesem Axiom beim Beweise der Kongruenzsätze Gebrauch gemacht. Wir sagen:

2. Der Raum ist kongruent.

Ferner haben wir die Annahme gemacht (S. 10), dafs zwei Gerade sich nur in einem Punkte schneiden können. Hiermit ist zugleich festgesetzt. dafs zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie möglich ist. Auch wurde bereits (S. 34) auf ein anderes Axiom hingewiesen, welches das Verhalten der parallelen Linien bestimmt. In dem letztern tritt uns klar die Annahme entgegen, dafs der Raum unbegrenzt sei, und diese Annahme ist uns gleichfalls überaus naheliegend. Schon S. 1 konnten wir darauf hinweisen, dafs wir in Gedanken jede gerade Linie ins Unendliche verlängern können und nicht zu befürchten brauchen, jemals an eine Grenze oder Schranke zu gelangen. Das Gesagte fafst man wieder in ein Axiom mit zwei Untersätzen zusammen:

3. Der Raum ist eben[3], d. h.

a) Zwischen zwei Punkten giebt es nur **eine** gerade Linie.

b) Durch einen Punkt aufserhalb einer Geraden kann zu derselben nur **eine** parallele Linie gezogen werden.

---

[1] Axiom nennen wir eine Wahrheit, die sich nicht durch Vernunftschlüsse auf andere einfachere Wahrheiten zurückführen läfst (vgl. S. 10).

[2] Vgl. v. Helmholtz, Populär-wissenschaftliche Vorträge. Bd. III.

[3] An dieser von Riemann eingeführten Bezeichnung mag trotz mancher Bedenken einstweilen festgehalten werden. Man darf dabei nicht an die gewöhnliche Bedeutung des Wortes „eben“ denken.

Es ist Sache der wissenschaftlichen Geometrie, die Unabhängigkeit dieser Axiome voneinander festzustellen und aus denselben die Wahrheiten (Lehrsätze) sämtlich und in geordneter Reihenfolge zu entwickeln. In dieser Hinsicht sei nochmals auf die Werke von W. Killing, H. v. Helmholtz sowie auf Rausenbergers Elementargeometrie (1887) verwiesen.

II.

Die Auflösung einer Gleichung zweiten Grades kann geometrisch mit Zirkel und Lineal bewerkstelligt werden, und umgekehrt. Eine Aufgabe kann unlösbar werden, entweder weil die verlangte Zeichnung sich wohl in Worten angeben, aber nicht thatsächlich ausführen läfst, oder weil überhaupt die Zeichnung nicht angebbar ist.

Das erste tritt ein, wenn die vorgeschriebenen Kreise sich untereinander oder mit vorgeschriebenen Geraden nicht schneiden, wie bei der Aufgabe: von einem Punkte innerhalb eines Kreises an den Kreis eine Tangente zu ziehen. Diese Unmöglichkeit entspricht einer algebraischen Gleichung zweiten Grades mit komplexen (imaginären) Wurzeln.

Das zweite tritt ein, wenn die algebraische (rechnerische) Behandlung der Aufgabe auf eine Gleichung führt, die nicht auf eine oder mehrere quadratische Gleichungen zurückführbar ist, wie bei der Dreiteilung des beliebigen Winkels.

Kommen bei einer Lösung nur gerade Linien, kein Kreis in Betracht, so kann dieselbe niemals eigentlich unmöglich werden, sondern höchstens entarten.

Das genaue Zusammentreffen der Lösbarkeit oder Nichtlösbarkeit einer Aufgabe, geometrisch durch Zirkel und Lineal, algebraisch durch quadratische Gleichungen, verleiht der Schulgeometrie den Reiz einer Abrundung und Vollendung, den kaum ein anderes Wissensgebiet in gleichem Mafse besitzt.

